Aufgrund einer Reihe von Untersuchungsergebnissen und Analysen scheinen von den kognitiven Stilen drei Dimensionen für das Lernen von Mathematik relevant zu sein. Sie sollen nachfolgend beschrieben werden.[1)]

2.1 BEGRIFFSBILDUNGSSTILE: analytisch-deskriptiv, schließend-kategorial und relational

Die Forschungsgruppe um Kagan, Moss und Sigel beobachtete drei Stile der Begriffsbildung im Sinne der Klassenbildung. In Abgrenzung zu der Begriffsfähigkeit, die von der Entwicklung einzelner kognitiver Prozesse abhängig ist, meint Begriffsbildungsstil hier die Art und Weise der Begriffsklassifizierung, d.h. die individuelle Berücksichtigung bestimmter Aspekte (vgl. Falkner 1973). Ein Beispiel aus dem "Sigel Conceptual Style Test" soll dem Verständnis dienen.

Abb. 1: Beispiel aus dem Sigel Conceptual Style Test[2)]

Anmerkung 1) Vgl. zu den Definitionen SKOWRONEK (1968), KAGAN/KOGAN (197o), FALKNER (1973) und SIGEL/COOP (1974).

Anmerkung 2) Directions: Choose two of the three pictures that you think go together, or alike in some way. Write the letters of these two pictures, and then tell why you feel these two go together or are alike in some way. There are no right or wrong answers, so just put what you think is best.

A n a l y t i s c h - d e s k r i p t i v : Diese Kategorie schließt Auffassungen bzw. Klassifizierungen ein, die sich auf die Ähnlichkeit objektiver Momente der Reizsituation stützen, die wiederum Teil des Gesamtreizes sind. Beim Testbeispiel könnte der Pb. die Bilder D und F auswählen, weil beide Frauen schwarze Schuhe tragen. Die Antwort charakterisiert das Aufteilen der Reizsituation in diskrete Teile, wobei diese die Grundlage für die Kategorisierung des Ganzen bilden.

S c h l i e ß e n d - k a t e g o r i a l : Antworten dieser Art gehen nicht direkt auf objektive Attribute der Reizkonstellation zurück, sondern beziehen eine Schlußfolgerung aufgrund inhaltlicher Merkmale ein. Im Beispiel können wiederum D und F eine Klasse bilden, weil D und F Frauen darstellen.

R e l a t i o n a l : Hier werden Klassifizierungen funktionaler Art eingeordnet. Dabei treten zeitliche und räumliche Verknüpfungen der Figuren auf, die einzelnen Teile werden thematisch zusammengefaßt. In diesem Sinne gehören z.B. E und F zusammen, weil F die Aufgabe hat, das Haus zu säubern. Bei relationalen Antworten gibt es keine unabhängigen Elemente einer Klasse. Die Beziehung zu einem anderen Element bestimmt die Auswahl.

2.2 WAHRNEHMUNGSSTILE : Feldabhängigkeit versus Feldunabhängigkeit

Diese Stile betrafen zunächst unterschiedliche Formen des Wahrnehmens und der Informationsaufnahme. Der globalen Art F e l d a b h ä n g i g k e i t steht die mehr analytische[1)] Art F e l d u n a b h ä n g i g k e i t gegenüber. Während beim ersten Stil der Einfluß des Feldes bzw. des Kontextes groß ist, werden mit zunehmender Feldunabhängigkeit die Ein-

---

Anmerkung 1) Der Terminus "analytisch" ist nicht identisch mit dem analytischen Begriffsbildungsstil nach Sigel.

zelheiten vom Hintergrund abgehoben und die Kontexteinflüsse überwunden (vgl. Witkin et al. 1962). Die Definition, theoretische Einordnung und Testkonstruktionen gehen auf Forschungsarbeiten der Gruppe um Witkin zurück.

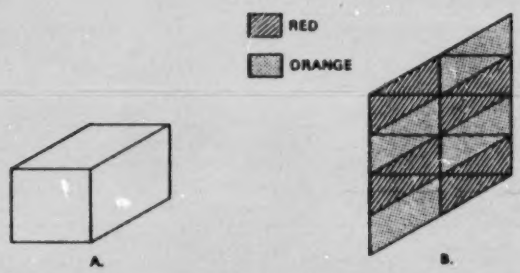


Abb. 2: Beispiel aus dem "Embedded Figures Test" [1)]

In einer Reihe von neueren Untersuchungen wurden Korrelationen zwischen Feldabhängigkeit vs. Feldunabhängigkeit und generellen Eigenarten des Denkens sowie Handelns festgestellt, so daß die Bedeutung der Stile über den Bereich des Wahrnehmens hinaus ausgedehnt werden muß.

2.3 CONCEPTUAL TEMPO : Impulsivität versus Reflektiertheit

Unter dem kognitiven Tempo I m p u l s i v i t ä t versus R e f l e k t i e r t h e i t versteht man individuelle Unterschiede in der Geschwindigkeit, mit der Informationen verarbeitet, Hypothesen ausgewählt und angeboten werden. Diese Dimension beschreibt das Maß des Reflektierens beim Kinde und Erwachsenen über die unterschiedliche Gültigkeit alternativer Reize oder Lösungshypothesen in Problemsituationen. Impulsive zeigen schnelle Antwortzeiten und bieten die erstbeste Hypothese an, ohne diese zuvor intensiv auf ihre Ange-

---

Anmerkung 1) Direction: Find the simple geometric figure (A) in the more complex figure (B).

messenheit und Gültigkeit geprüft zu haben. Das ist verbunden mit einer großen Fehlerwahrscheinlichkeit in komplexen Situationen. Dagegen sind Reflektierende dadurch charakterisiert, daß sie zögern, ehe sie die erste Klassifikation oder Lösungshypothese nennen. Sie bemühen sich um ein Abwägen mehrerer Lösungshypothesen, so daß sich eine negative Korrelation zwischen der benötigten Zeit und der Anzahl der Fehlleistungen feststellen läßt.[1)]

Wir können im Rahmen dieses Artikels weder die Fülle der für den Unterricht allgemein relevanten Untersuchungen im Zusammenhang mit kognitiven Stilen noch die kritische Diskussion zur Theorie selbst referieren. Für die psychologische Forschung zur kognitiven Stiltheorie standen in den letzten Jahren Fragen im Vordergrund wie: Beziehungen zu Intelligenz, Kreativität und sozioökonomischem Status sowie Bedingungen für die Ausprägung kognitiver Stile und Möglichkeiten der Veränderung. Untersuchungen zur pädagogischen Bedeutung können von seiten der experimentellen Psychologie nicht erwartet werden; hier liegen explizit didaktische Forschungsfelder vor.

Die vorliegenden Befunde einer derart didaktischen Forschung zum Mathematiklernen sollen im nächsten Abschnitt referiert werden.

Anmerkung 1) Gebräuchliches Instrument zur Bestimmung von Imp. vs. Refl. ist der Matching Familiar Figures Test (MFF) nach Kagan. Den einzelnen Pbn. werden das Bild eines vertrauten Objekts und gleichzeitig 4 bis 12 (je nach Alter) sehr ähnliche Darstellungen gezeigt, wovon nur genau eine dem Original entspricht. Diese identische Darstellung soll gefunden werden. Bei Fehlantworten muß der Pb. die einzelne Aufgabe bis zur richtigen Entscheidung bearbeiten. Festgehalten werden die Zeiten bis zur ersten Antwort und die Gesamtzahl der Fehlantworten. Nach einer doppelten Medianteilung wird die Einteilung in reflektierend (viel Zeit - wenig Fehler), impulsiv (wenig Zeit - viele Fehler) sowie in zwei Mischtypen vorgenommen.

Diese Stildimension geht auf eine Vielzahl von Untersuchungen von Kagan und Mitarbeiter im letzten Jahrzehnt zurück. Deutschsprachige Überblicke bieten u.a. die Veröffentlichungen von Wagner (Universität Bochum) und die Dissertation des Verfassers (a.a.O.).

3. UNTERSUCHUNGSERGEBNISSE ZUM LERNEN VON MATHEMATIK

Die Ansätze lassen sich vier Untersuchungsbereichen zuordnen: dem Einfluß kognitiver Stile auf

(1) die Leistungen und den Erfolg im Mathematikunterricht;

(2) die Begriffsbildung im mathematischen Anfangsunterricht;

(3) das Bearbeiten mathematischer Inhalte und Probleme in unterschiedlichen Repräsentationsformen;

(4) Wechselwirkungen zwischen Lehrern und Schülern (Trait-Trait-Interaction).

Zu (1): In zahlreichen Untersuchungen werden Beziehungen zwischen "Math.-Achievement-Tests" und der Ausprägung bestimmter kognitiver Stile bei den Schülern aufgezeigt. Die vorliegenden Befunde erlauben die Aussagen, daß für den Erfolg im Mathematikunterricht

- die Reflektiertheit,
- der analytische Begriffsbildungsstil sowie
- die Feldunabhängigkeit

bedeutsame kognitive Dispositionen sind. Die uns vorliegenden Untersuchungsergebnisse werden nachfolgend tabellarisch zusammengestellt. Die Analyse von SPITLER (1970) und die Untersuchungen des Verfassers[1)] bestätigen die Relevanz der bereits erwähnten kognitiven Stile für den Erfolg im Mathematikunterricht. Dafür gibt das "Conceptual Tempo" Impulsivität vs. Reflektiertheit offensichtlich die wichtigsten Hinweise in der Primarstufe und Sekundarstufe I. Die Studie von SHUERT (1972), in der die Frage nach den kognitiven Stilen besonders erfolgreicher Mathematikstudenten und Mathematiker untersucht wurde, weist auf die Bedeutung dieser kognitiven Persönlichkeitsmerkmale auch bei der Auseinandersetzung mit komplexen mathematischen Problemen hin.

Anmerkung 1) Dissertation zum Thema: Zur Bedeutung der Dimension Impulsivität vs. Reflektiertheit für den Bereich der Erziehung. (Universität Bielefeld, Fakultät für PPP, 1974).

UNTERSUCHUNG	ALTER d.Pbn.	KOGNITIVE STILE (gemessen mit)	LEISTUNGSMESSUNG mit	E R G E B N I S S E
ROSENFELD 1958	grade 8	Feldabh.-Feldunabh. (EFT)	Progressive Arithmetic Test / B	Feldunabh.Schüler sind signifikant erfolgreicher, insbes.bei math.Beweisführungen.
CATHCART/ LIEDTKE 1969	grade 2/ 3	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematics Achievement Test	Refl.Schüler erreichen höhere Punktwerte; das zeigt sich verstärkt beim Subtest "Problem Solving".
RICHARDS 1972	grade 1	Begriffsbildungsstile (SCST) Imp. - Refl. (MFF)	S.R.A. Achievement Series / C	Der analytische Begriffsbildungsstil und eine geringe Fehlerzahl beim MFF korrelieren positiv mit der Begriffsfähigkeit und dem schlußfolgernden Denken im MU sowie der Rechenfertigkeit.
NELSON 1972	grade 7	Feldabh.-Feldunabh. (EFT) Imp. - Refl. (MFF)	Geometric Achievement Test	Feldunabh.Schüler sind bei der Bearbeitung geometrischer Probleme erfolgreicher als feldabh. Zwischen refl. bzw. imp. Pbn. zeigen sich keine Unterschiede.
EDGELL 1973	grade 3	Imp. - Refl. (MFF)	Pick Pictures Task (NLSMA)	Refl. Schüler zeigen bessere Leistungen als ihre imp. Altersgenossen.
REBHUN 1973	grade 2, 3, 4	Imp. - Refl. (MFF)	Metropolitan Achievement Test / G	Insgesamt und bei den drei Subtests - Math. Computation, Concepts und Problem Solving - sind die refl. Schüler erfolgreicher.
WALEK 1972	grade 4	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematical Problem Solving Test	Refl. Schüler lösen die math.Probleme signifikant besser.
CATHCART/ LIEDTKE 1973	grade 2	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematics Achievement Test	Refl. zeigen bessere Leistungen bei den Subtests "Recall of Basic Facts" und "Problem Solving" sowie beim Leistungstest insgesamt.

NG	ALTER d.Pbn.	KOGNITIVE STILE (gemessen mit)	LEISTUNGSMESSUNG mit	E R G E B N I S S E
8	grade 8	Feldabh.-Feldunabh. (EFT)	Progressive Arithmetic Test / B	Feldunabh.Schüler sind signifikant erfolgreicher, insbes.bei math.Beweisführungen.
9	grade 2/ 3	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematics Achievement Test	Refl.Schüler erreichen höhere Punktwerte; das zeigt sich verstärkt beim Subtest "Problem Solving".
2	grade 1	Begriffsbildungsstile (SCST) Imp. - Refl. (MFF)	S.R.A. Achievement Series / C	Der analytische Begriffsbildungsstil und eine geringe Fehlerzahl beim MFF korrelieren positiv mit der Begriffsfähigkeit und dem schlußfolgernden Denken im MU sowie der Rechenfertigkeit.
2	grade 7	Feldabh.-Feldunabh. (EFT) Imp. - Refl. (MFF)	Geometric Achievement Test	Feldunabh.Schüler sind bei der Bearbeitung geometrischer Probleme erfolgreicher als feldabh. Zwischen refl. bzw. imp. Pbn. zeigen sich keine Unterschiede.
3	grade 3	Imp. - Refl. (MFF)	Pick Pictures Task (NLSMA)	Refl. Schüler zeigen bessere Leistungen als ihre imp. Altersgenossen.
3	grade 2, 3, 4	Imp. - Refl. (MFF)	Metropolitan Achievement Test / G	Insgesamt und bei den drei Subtests - Math. Computation, Concepts und Problem Solving - sind die refl. Schüler erfolgreicher.
2	grade 4	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematical Problem Solving Test	Refl. Schüler lösen die math.Probleme signifikant besser.
3	grade 2	Imp. - Refl. (MFF)	Mathematics Achievement Test	Refl. zeigen bessere Leistungen bei den Subtests "Recall of Basic Facts" und "Problem Solving" sowie beim Leistungstest insgesamt.

Zu (2): Innerhalb der didaktischen Diskussion zum mathematischen Anfangsunterricht nehmen Piagets Erkenntnisse zur Entwicklung grundlegender Begriffe einen breiten Raum ein. Sie beeinflussen die Auswahl, Gestaltung und Sequentierung der Unterrichtsmaterialien bzw. mathematischen Inhalte.

SIMPSON (197o), SPITLER (197o), POLMATIER (1972) und SCHWEREL (1974) stellten Beziehungen zwischen kognitiven Stilen und der Bildung mathematischer Grundbegriffe nach Piaget fest. Die beobachteten Effekte beim Bearbeiten von Piagets Aufgaben zur Invarianz von Mächtigkeit, Substanz und Volumen, zur Klasseninklusion und zur Entwicklung geometrischer Fähigkeiten unter topologischem bzw. euklidischem Aspekt sind signifikant groß. So faßt Spitler nach einer breit angelegten Analyse zusammen, daß

- die Reflektiertheit,
- der analytische Begriffsbildungsstil sowie
- die Feldunabhängigkeit

"... seem to be benefical for the acquisition of the concepts that are the basic foundation of number, space and geometry." (197o, 118)

Zu (3): Zum dritten Untersuchungsfeld, das die Auswirkungen kognitiver Stile auf das Lernen an Curriculummaterialien betrifft, sind uns bisher noch keine empirischen Daten zugänglich. Die Wichtigkeit dieses Aspekts wurde durch Unterrichtsbeobachtungen und Lehrererfahrungen deutlich, wie sie SPITLER (197o) in ihrer Analyse benutzt. Hier liegt u.E. ein explizit didaktisches Forschungsfeld vor, dessen Bearbeitung noch aussteht. In der nachfolgenden Problembeschreibung beziehen wir uns im wesentlichen auf die Aussagen und Hypothesen Spitlers.

Die Diskussion der Brunerschen Repräsentationsmodi sowie die Reform der mathematischen Inhalte (Relationen, Mengenlehre, Geometrie etc. bereits in der Grundschule) haben vermehrt zu einer bildhaften Gestaltung von mathematischen Aufgaben und Erklärungen geführt. Die Ikonisierung mathematischer Sachverhalte hat am Schulanfang zweifellos viele Vorteile, wie z.B.

die Möglichkeit, den Schülern nichtverbale Arbeitsanweisungen zu geben. Man sollte jedoch bedenken, daß die Darstellungen sehr oft ein Gliedern in kleine Detailaspekte erfordern. Nachfolgend drei Beispiele aus Grundschullehrbüchern:

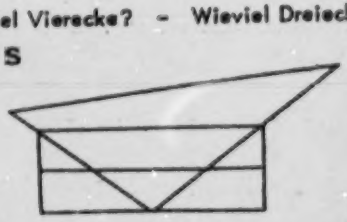


Abb. 3

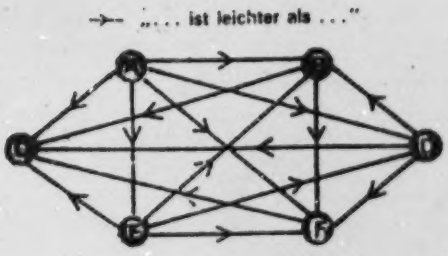


Abb. 4

Grundmenge = Menge der Plättchen eines Begriffsspiels
Menge A = Menge der gelben Plättchen
Menge B = Menge der glatten Plättchen
Menge C = Menge der runden Plättchen

Abb. 5

Es wird deutlich, daß feldabhängigen Kindern das Bearbeiten derartiger Aufgaben große Schwierigkeiten bereiten muß, während die feldunabhängigen Schüler Vorteile haben, da sie sich besser auf die Details konzentrieren und von unwesentlichen Dingen absehen können.

Die Beispiele aus Lehrbüchern der Sekundarstufe zeigen, daß sich das Problem nicht auf den Mathematikunterricht der Primarstufe beschränken läßt.

Abb. 6

1. Löse die Snellius-Pothenot-Aufgabe nach Abb. 81. Berechne nach dem Kosinussatz e, nach dem Sinussatz ε_1 (oder ε_2) und daraus dann x.

2. Führe die Berechnung nach Übg. 1 auch für die Lagebeziehung durch, bei der beide Umkreismittelpunkte M_1 und M_2 auf derselben Seite von x liegen.

3. Berechne die Aufgabe von Snellius-Pothenot mit folgenden Zahlenwerten

a) a = 4250 m; b = 6540 m; $\alpha = 115° 40'$; $\beta = 36° 35'$; $\gamma = 57° 15'$;
b) a = 975 m; b = 853 m; $\alpha = 105{,}6°$; $\beta = 23{,}7°$; $\gamma = 20{,}6°$.

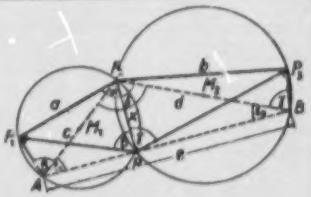


Abb. 81
Zur Aufgabe von Snellius-Pothenot

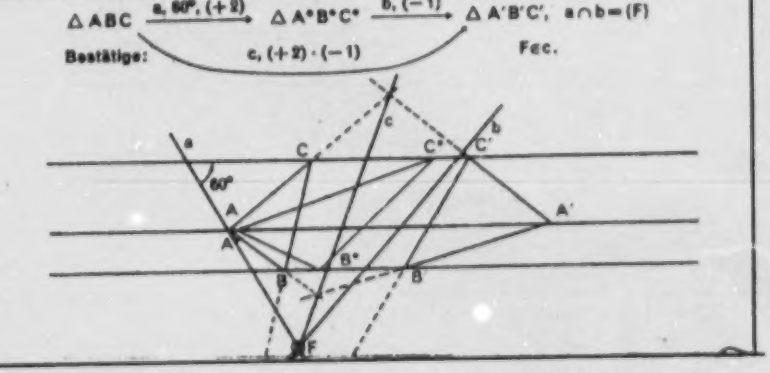
Abb. 7

37. a) $\frac{3x^3y^4}{4a^3b^2} : \frac{9x^4y^2}{3a^5b^4}$ b) $\frac{6a^4b^3}{5x^3y^3} : \frac{5a^2b^4}{3x^4y^5}$ c) $\frac{9x^5y^3}{8a^2b^3} : \frac{27x^8y^5}{16a^5b^4}$

38. a) $\frac{3a^m b^{n-2} c^{m-3}}{5x^m y^{n-3} z^{n-5}} : \frac{3a^m b^{n+1} c^{m+2}}{4x^m y^{m+1} z^{m+2}}$ b) $\frac{x^{2a+1}y^{2a-1}}{u^{2a-1}v^{2a+1}} : \frac{x^{2a-1}y^{2a+1}}{u^{2a+1}v^{2a-1}}$

39. a) $(10a^5+23a^4+18a^3+9a^2) : (2a^2+3a)$
b) $(175b^8+200b^7-350b^5-400b^4+175b^3+200b) : (7b^3+8b)$

Abb. 8



Neben den Stilen Feldabhängigkeit bzw. Feldunabhängigkeit bei der Informationsaufnahme und -verarbeitung wird auch das konzeptuelle Tempo die Fähigkeit des Analysierens von bildhaften Darstellungen und Texten beeinflussen. Der reflektierende Schüler wird im Gegensatz zum impulsiven erst mehrere Hypothesen bilden und diese gegeneinander abwägen, ehe er eine mögliche Lösung anbietet.

In diesem Zusammenhang soll auf die Beziehungen zwischen Impulsivität vs. Reflektiertheit und der Dezentrierungsfähigkeit nach Piaget hingewiesen werden. Für Piaget ist beim jüngeren Kind die Wahrnehmung in der Weise zentriert, daß sie

durch die dominierenden Aspekte des visuellen Feldes gefangen und festgehalten wird. Mit dem Alter und der Entwicklung wahrnehmungsmäßiger Strategien nimmt die Dezentrierung der kindlichen Wahrnehmung zu, und werden gleichzeitig die Einflüsse der sog. Feldeffekte überwunden. SHINE (1971) weist in ihrer Untersuchung nach, daß sich impulsive Schüler bei der Analyse von Darstellungen stärker durch Feldeffekte beeinflussen lassen. Ein feldabhängiges und zugleich impulsives Kind wird die größten Schwierigkeiten beim Verständnis von komplexen, bildhaften Darstellungen mathematischer Sachverhalte haben.

Zu (4): Mit der zunehmenden Erkenntnis über die Komplexität unterrichtlichen Geschehens wurde deutlich, daß in Forschung und Innovationsbemühungen die Beschränkung auf isolierte Aspekte (Lehrerverhalten, Schülermerkmale, Curriculummaterial, außerschulische Bedingungen etc.) dem Unterrichtsprozeß nicht gerecht wird. Das führte in den letzten Jahren u.a. zu den Forschungsansätzen der Wechselwirkung zwischen Schülermerkmalen und Unterrichtsform/Unterrichtsinhalten (Trait-Treatment-Interaction) sowie dem Untersuchen der Effekte von Interaktionen zwischen Schüler- und Lehrermerkmalen (Trait-Trait-Interaction) im Hinblick auf den schulischen Erfolg. Die "Übereinstimmungs-Gegensatz-Hypothese" bei Schüler x Lehrer Interaktionen (vgl.Brophy-Good, 1974) wird in zahlreichen Untersuchungen bestätigt. Derartige Befunde gewinnen an Gewicht, wenn Brophy feststellt:

> "Most teacher behavior directed at students is directed at individuals rather than at the whole class, and student individual differences affect such teacher behavior." (1975, 1)

Zwei Untersuchungen zum Mathematikunterricht sollen referiert werden, die auf die Relevanz kognitiver Stile unter dem obigen Aspekt hinweisen. WASSER (1969) stellte fest, daß Lehrer dahin tendieren, die Mathematikleistungen der Schüler besser zu beurteilen und zu benoten, wenn die kognitiven Stile der Schüler mit ihren eigenen vergleichbar sind.

Der Verfasser untersuchte die Auswirkungen von Trait-Trait-Interaction im Hinblick auf den Erfolg im Mathematikunterricht

am Ende der Grundschulzeit. Die Leistungen wurden durch einen lernzielorientierten Test gemessen, als kognitive Persönlichkeitsvariable konnte bei Schülern und Lehrern das konzeptuelle Tempo berücksichtigt werden. Dabei zeigen sich bereichsspezifische Unterschiede. So waren bei Aufgaben aus der Mengensprache und dem Sachrechnen (vgl. Abb.9) die Effekte signifikant, nicht aber im Bereich der Geometrie (vgl. Abb.10).

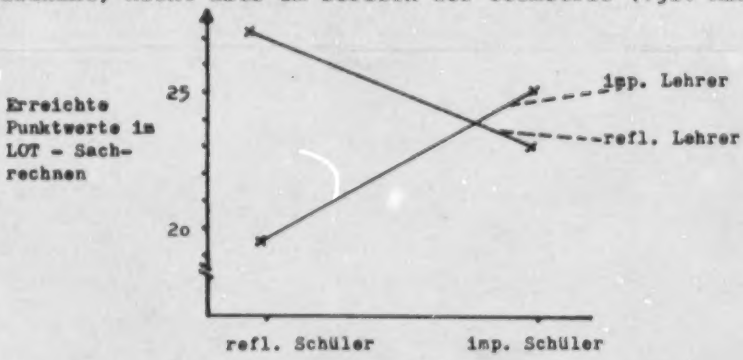


Abb. 9

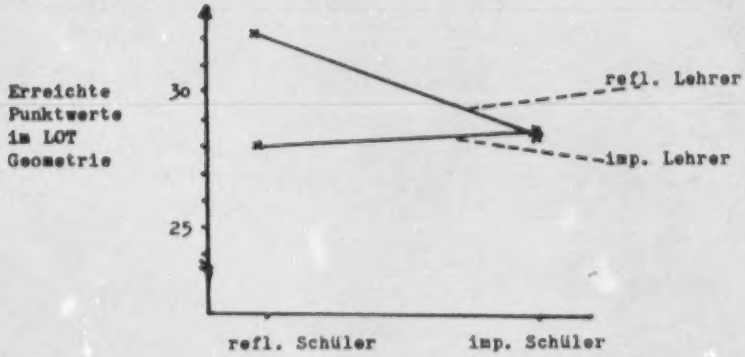


Abb. 10

4. DISKUSSION

Die referierten Untersuchungen weisen darauf hin, daß für das Lernen von Mathematik insgesamt

- die Feldunabhängigkeit,
- der analytische Begriffsbildungsstil und
- die Reflektiertheit

vorteilhafte kognitive Dispositionen sind. Beim konzeptuellen Tempo wurden bereichsspezifische Unterschiede festgestellt (vgl. Nelson 1972, Radatz aaO.). Reflektierende Kinder zeigen in der Mengensprache und den sog. problemorientierten Aufgaben die größten Erfolge, während sich im Bereich der Geometrie die Erfolge auf reflektierende und impulsive gleichermaßen verteilen. Es soll auf einen folgenreichen Zusammenhang zwischen der Bereichsspezifität kognitiver Stile und deren Ausprägung in Abhängigkeit von der Zugehörigkeit zu einer bestimmten sozialen Schicht hingewiesen werden. Kinder aus der sozialen Mittel- bzw. Oberschicht tendieren sehr viel häufiger zu einem reflektierenden und analytischen Stil als die Unterschichtkinder (Kagan/Kogan 197o, Cohem 1968, Sigel 1971). So müssen kompensatorische Ambitionen in Verbindung mit der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule bei einer Überbetonung strukturmathematischer und problemorientierter Inhalte fragwürdig erscheinen. Insbesondere dann, wenn man bedenkt, daß die Ausprägung der spezifisch vorteilhaften kognitiven Stile vom sozioökonomischen Status und den Sozialisationserfahrungen der Kinder abhängt.

Die Erkenntnisse über die Bedeutung bestimmter kognitiver Stile für das Lernen von Mathematik könnten zur Forderung führen, diese kognitiven Dispositionen im Hinblick auf das Mathematiklernen "positiv" zu verändern. Die uns bekannten Versuche zur Trainierbarkeit kognitiver Stile (vgl. u.a. Wagner 1975, Sigel/Coop 1974) machen deutlich, daß Veränderungen nur durch spezifische Beeinflussung des Informationsverarbeitungsprozesses, des Wahrnehmungsverhaltens und der generellen Problemlösungsstrategien möglich sind. Das kann der Mathematikunterricht nicht leisten. Selbst wenn es möglich wäre, den Mathematikunterricht daraufhin anzulegen, die Qualität der für das Lernen von Mathematik relevanten Stildimensionen zu steigern, wäre ein derartiger Ansatz pädagogisch problematisch. Man weiß, daß

bestimmte kognitive Persönlichkeitsmerkmale wohl für das Lösen mathematischer Probleme vorteilhaft sind, sich gleichzeitig aber negativ bei der Auseinandersetzung in musisch-ästhetischen, sozialen und anderen Bereichen auswirken (vgl. Kagan/Kogan 197o). So kann kein Unterrichtsfach für sich in Anspruch nehmen, die spezifisch anzustrebenden Schülermerkmale zu pflegen bzw. zu manipulieren.

Akzeptiert man die Unmöglichkeit fachspezifischer Prägung kognitiver Persönlichkeitsmerkmale und bedenkt man deren relative Stabilität, bieten sich für didaktische Innovationen zwei Bereiche an: die Lehrerbildung und die Curriculumentwicklung.

.1 Im Unterrichtsprozeß nimmt der Lehrer mit seinen Entscheidungen und seinem Verhalten eine zentrale Rolle ein. Die Wirksamkeit curricularer Vorschläge wird überwiegend durch den Lehrer bestimmt, insofern er noch so schön und präzis komponierte Materialien zu sehr unterschiedlichen Wirkungen bringen kann. So bedarf es der Sensibilisierung des Lehrers für seine Interaktionen mit dem einzelnen Schüler im Unterrichtsprozeß. Das setzt u.a. die Entwicklung handhabbarer Diagnosehilfen - nicht psychologischer Tests - und darauf abgestimmte Handlungsmodelle voraus. Als mögliche Zugänge sehen wir die Bedingungsanalyse des mathematischen Lernprozesses beim Schüler mit Hilfe der didaktischen Fehleranalyse sowie den Erfahrungsaustausch von Lehrern in Kooperation mit Mathematikdidaktikern an.

.2 Im curricularen Bereich sollte versucht werden, den methodischen Absolutheitsanspruch zu überwinden. Die gebräuchlichen Lehrwerke und Unterrichtsmaterialien sind häufig dadurch gekennzeichnet, daß alle Schüler nach einer Methode oder mit Hilfe eines sog. didaktischen Prinzips die Lernziele erreichen sollen. Man kann aber davon ausgehen, daß kein Lehrverfahren oder didaktisches Modell für alle Schüler gleichermaßen effektiv ist. Gerade die Ergebnisse der Forschungsansätze zur Trait-Treatment-Interaktion weisen

auf die Unzulänglichkeiten normativer Methoden für alle Schüler hin.

Aus FLAMMERs (1975) Forderung, in der gegenwärtigen Unterrichtspraxis möglichst viele Arten von Unterrichtsstilen, Repräsentationsformen und Begriffsmodellen zu realisieren, um so möglichst vielen Schülern den Einsatz ihrer besonderen Fähigkeiten einzuräumen, läßt sich eine Mehrwegmethode ableiten. Durch eine breite Fächerung von Unterrichtsstilen, Repräsentationsformen und Begriffsmodellen müßte sie versuchen, die individuellen Begriffsbildungs-, Wahrnehmungs- oder Problemlösungsstile der Schüler zu berücksichtigen. Wir sehen hier eine hoffnungsvolle Möglichkeit der Differenzierung bzw. Individualisierung.

> "The more varied and flexible the style options that individuals have, the more successful they are in problemsolving behavior. It would, therefore, be advantageous for the children to have more options." (Sigel/Coop 1974, S.269)

Sensibilisierung der Lehrer, individualisierende Handlungsmodelle und die Mehrwegmethode eröffnen der Erziehung und der Mathematik in der Schule einen Bereich, der bisher nicht ausdrücklich Gegenstand des Unterrichts war: die S e l b s t r e f l e k t i e r t h e i t . Ein anzustrebendes Ziel des Mathematikunterrichts muß es sein, den Schüler zur Einschätzung seiner kognitiven, sozialen, motivationalen u.a. Merkmale anzuleiten und ihm Möglichkeiten zu bieten, die Wirksamkeit verschiedener Stile der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sowie seinen spezifischen Lerntyp zu erfahren. Für ROTH (1971) sind derartige Lehr- und Erziehungsprozesse zur Gewinnung von Selbstkontrolle notwendige Voraussetzungen für die Entwicklung eines mündigen Verhaltens.

In der mathematik-didaktischen Forschung und Curriculumentwicklung sollte die Bedeutung und Überbetonung inhaltlicher Aspekte ("was") relativiert werden durch die Analyse der Bedingungen des mathematischen Lernprozesses ("wie"). Letztere

können nicht aus der Struktur der Fachdisziplin Mathematik mit Hilfe mathematischer Elementarisierungen oder Reflexionen gewonnen werden. Auf mathematische Inhalte beschränkte Handlungsmodelle müssen zur Folge haben, daß sich der Lehrer zu sehr mit dem Wissen der Schüler befaßt und nicht mit der "Person" und ihren aktuellen Lernbedingungen.

LITERATUR

Bauersfeld H. : Forschungsdesiderate in der Mathematikdidaktik. Vortrag auf der 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Saarbrücken, 12.3.1975

Bigalke H. : Sinn und Bedeutung der Mathematikdidaktik. In: ZDM 1974 (6), Heft 3

Brophy J.E. Good T.L. : Teacher - Student Relationship. New York 1974

Brophy J.E. : The Student as the Unit of Analysis Research Report No 75 - 12, University of Texas/Austin

Cathcart W.G. Liedtke W. : Reflectiveness/Impulsiveness and Mathematics Achievement. In: Arithmetic Teacher 1969, 563-567

Cathcart W.G. Liedtke W. : Role of Conceptual Tempo in Concept Formation. In: Alberta Journal of Educational Research 1973 (19) No 3, 216-223

Cohen R.A. : The Relation between Social-Conceptual Style and Orientation to School Requirement. In: Sociology of Education 1968 (41), 201f

Coop R.H. White K. : Psychological Concepts in the Classroom. New York 1974

Cunningham W.G. : The Impact of Student-Teacher Pairings on Teacher Effectiveness. In: American Educational Research Journal 1975 (12), 169-189

Edgell J.J. : The Relation between Cognitive Style of Children and Their Cognitive Strategy in the Attainment of Selected Mathematical Concepts. Diss. 1973 (Austin), DAI 34 A, 2384

Falkner R. : Begriffsbildungsstile im Vorschul- und Schulkindergartenalter unter besonderer Berücksichtigung analytischer Zuordnungen. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht 1973 (20), 377f

Flammer A. : Wechselwirkung zwischen Schülermerkmal und Unterrichtsmethode. In: Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie 1973 (2), 130-147

Flammer A. : Individuelle Unterschiede im Lernen. Weinheim 1975

Freudenthal H. : Sinn und Bedeutung der Didaktik der Mathematik. In: ZDM 1974 (6), Heft 3

Freund H.
Sorger P. : Fähigkeiten im mathematischen Anfangsunterricht - Versuch einer Operationalisierung. In: Die Schulwarte 1974 (27), Heft 1o/11, 12o-136

Glaser R. : Lernen und individuelle Unterschiede. In: Edelstein W. Hopf D. (Hrsg.): Bedingungen des Bildungsprozesses. Stuttgart 1973

Hunt D.E.
Sullivan E.V. : Between Psychology and Education. Himsdale 1974

Kagan J.
Kogan N. : Individuality and Cognitive Performance. In: Mussen P.H. (Ed.): Carmichael's Manual of Child Psychology, 3rd Ed. (Vol. 1). New York 197o

Kifer E. : Relationship between Academic Achievement and Personality Characteristics: A Quasi - Longitudinal Study In: American Educational Research Journal 1975 (12) No 2, 191-21o

Kilpatrick J. : Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. Paper at Research Workshop, May 1975 in Athens

Messick S. : The Criterion Problem in the Evaluation of Instruction: Assessing Possible, Not Yet Intended, Out Comes. In: Wittrock M.C., Wiley D.E. (Ed.): The Evaluation of Instruction. New York 197o

Nelson B.A. : Effects of the Analytic-Global and Reflectivity-Impulsivity Cognitive Styles on the Acquisition of Geometry Concepts Presented Through Emphasis or No Emphasis and Discovery or Expository Lessons. Diss. 1972 (Wisconsin), DAI 33A, 4949

Polmatier R.J. : An Investigation of the Relationship of Conceptual Tempo and the Ability to Achieve Conservation. DAI 1972/73 1027A

Postel H. : Probleme und Möglichkeiten der Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Die Schulwarte 1974 (27), Heft 1o/11, 81-97

Rebhun A.M. : The Reflective - Impulsive Dimension and Mathematical Performance. Diss. 1973 (Los Angeles), DAI 34A, 3o39

Richards S. : Study of Relationship between Selected Conceptual Abilities and Mathematics Achievement among First Grade Children. Diss. 1972 (Los Angeles), DAI 33A, 2o85

Roeder P.M. : Modelle der Differenzierung in Abhängigkeit von Leistungsdimensionen einzelner Fächer. In: Dimensionen der Schulleistung (Deutscher Bildungsrat: Gutachten und Studien der Bildungskommission 21/1) Stuttgart 1974

Rosenfeld I.J. : Mathematical Ability as a Function of Perceptual Field-Dependency and Certain Personality Variables. Unveröffentlichte Dissertation. University of Oklahoma, 1958.

Roth H. : Pädagogische Anthropologie. Bd. I und II. Hannover 1971

Schwebel A.I.
Schwebel C.R. : The Relationship between Performance on Piagetian Tasks and Impulsive Responding. In: Journal for Research in Mathematics Education 1974 (5), 98-1o4

Scott N. : Cognitive Style and Mathematics Achievement. Paper at AERA Meeting 1975/Washington

Shine D.N. : Cognitive Impulsivity and Piaget's Theory of Perceptual Decentration. Dissertation 1971, Fordham University. DAI 72/2385 B

Shuert K.L. : A Study to Determine whether a Selected Type of Cognitive Style Predisposes One to Do Well in Mathematics. Diss. 197o (Wayne), DAI 31A, 3362

Sigel I.E. : The Development of Classificatory Skills in Young Children: A Training Program. In: Young Children 1971 (26), 17of

Sigel I.E.
Coop R.H. : Cognitive Style and Classroom Practice. In: Coop R.H., White K.: Psychological Concepts in the Classroom. New York 1974

Simpson R.E. : The Effects of Cognitive Styles and Chronological Age in Achievement Conservation Concepts of Substance, Weight and Volume. DAI 1971/72, 3353 - A

Skowronek H. : Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung, Hannover 1968

Spitler G.J. : An Investigation of Various Cognitive Styles and the Implication for Mathematics Education. Dissertation 197o, Wayne State University. DAI 71/1o5 A

Treumann K. : Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht. In: Dimensionen der Schulleistung (Deutscher Bildungsrat: Gutachten und Studien der Bildungskommission 21/2) Stuttgart 1974

Wagner I. : Reflection-Impulsivity Re-examined: Analysis and Modification of Cognitive Strategies. Paper at Biennal Meeting of Society for Research in Child Development, Denver 1975

Walek B.P. : A Study of the Relationship between Conceptual Tempo and Problem-Solving Abilities of Fourth-Grade Children. Dissertation 1972, DAI 1973 A, 215

Wasser L. : An Investigation into Cognitive Style as a Facet of Teachers' Systems of Student Appraisal. Dissertation: University of Michigan 1969

Witkin H., Dyk R.
Paterson, Karp S.
Goodenough E. : Psychological Differentiation. New York 1962

Wittmann E. : Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft. In: ZDM 1974 (6), Heft 3

RESEARCH ON SOME KEY NON-COGNITIVE VARIABLES IN MATHEMATICS EDUCATION

Marilyn N. Suydam

(The Ohio State University)

FOREWORD

The review which follows is based almost exclusively on research conducted in the United States. Comments on various educational factors also pertain to the American environment. Whether the same factors, and the findings of research, apply to children in other countries is a point which must be carefully considered. I regret that this restriction exists, that my background and knowledge of research in mathematics education is limited. I find that my time is rather filled by trying to keep up with what is going on in just the one country, however.

1. INTRODUCTION

Much lip-service in the United States is paid to the need to consider the affective domain as well as the cognitive domain in the teaching of mathematics. But the task is a difficult one, in the face of:

.1 societal emphasis on cognitive skills, virtually denigrating affective factors by endorsing such ideas as standardized testing, accountability, competency-based instruction, and behavioral objectives, which (in practice) tend to stress cognitive factors,

.2 societal acceptance and, indeed, expectancy of negative attitudes toward mathematics,

.3 lack of definitiveness of many affective variables, and

.4 scarcity of valid, accurate instruments to measure identifiable affective variables.

All of these have an influence on the teaching of mathematics; the latter two have a particular impact on research in mathematics education. Rather than being based on precisely defined variables, research on affective factors is frequently based on variables which can only be operationally defined, generally in terms of the instrument or procedure that is used to measure them. Yet the validity of some of these instruments is questionable: that they actually assess what they purport to measure, and not some extraneous factors, is unclear.

However, it must be remembered that the measurement of affective factors in mathematics education is a far newer field than the measurement of cognitive factors, as well as being far more difficult to assess. Human beings are conditioned gradually, from an early age, to constrain themselves from revealing honestly how they feel. Children learn to respond as they think others, whose opinions they respect, would want them to respond. They learn to try to project an image which is favorable to themselves. When they react otherwise, it

is often because other persons or events are influencing them. Thus to tap how a child feels about mathematics, or about himself, is a challenging task.

In this paper, the focus will be on certain affective factors or variables that have been the topic of research in mathematics education. Because much research attention has been directed toward attitudes and interests, studies on these variables will be reviewed first. This will be followed by presentation of research on self-concept, on anxiety, and on certain personality factors. Finally, conclusions and implications will be discussed. Emphasis is on studies which have been (1) reported during recent years and (2) conducted in grades 4 through 8.

2. ATTITUDES

2.1 Assessing Attitudes

Attitudes involve both cognitive and non-cognitive aspects, an intellctual appreciation and emotional reactions. Thus attitude toward mathematics involves many facets, ranging from awareness of the structural beauty of mathematics and of the important roles of mathematics, to feelings about the difficulty and challenge of learning mathematics, to interest in a particular type of mathematics or particular methods of being taught mathematics. As NEALE (1969) noted, "attitude toward learning mathematics" or "interest in mathematics" includes components such as liking or disliking mathematics, the tendency to engage in or avoid mathematics instruction, the belief that one is good or bad at mathematics, and the belief that mathematics is useful or useless.

Because attitudes are deep within us, they are not always directly expressed. Teachers and researchers alike recognize this, and the corollary that they are not easily observed or measured. (Nor can observations and measurements be readily interpreted.) This difficulty in measuring attitudes has led to the use of varied procedures, including:

.1 Observation. By observing his expressions, comments, and behaviors as a student reacts in a mathematical situation, we infer how he feels about mathematics. We note how often he chooses a mathematical activity when he has an option, how readily he attempts to apply mathematical ideas to reallife situations, how enthusiastically he reacts in a mathematics lesson.

.2 Inventories. We can use a checklist as a systematic approach to recording observations.

.3 Interviews. We ask the child leading questions, getting him involved in a discussion of how he feels toward mathematics, or what interests him mathematically.

.4 Questionnaires. We have the child react in the more impersonal paper-and-pencil mode to direct or subtle questions about his feelings toward mathematics and mathematical activities.

.5 Essays. At times we ask the student to comment directly on his attitudes by having him write an essay on a question such as, "Do you generally like or dislike mathematics? Why or why not?"

.6 Sentence completion. We have him complete sentences such as, "I like mathematics because ...".

.7 Rank ordering. By having him rank in order of preference the subjects which he is studying, we infer the level of his preference for mathematics by where he places it in relation to other subject areas.

.8 Picture preference. We have him tell which of two or more pictures he prefers; one picture shows an activity in which the use of mathematics is apparent.

.9 Apparatus indicating physiological states. Such instruments can provide a direct measurement of physiological factors which are known or presumed to be related to attitudes.

.10 Projective techniques. The child is asked to project himself into certain situations and describe his reactions.

.11 Semantic differential. This type of instrument requires the child to indicate his reaction to statements in terms of degree of agreement or disagreement to pairs of adjectives.

.12 Attitude scales. Perhaps the most widely used measure of attitude is the attitude scale, on which a child is asked to specify his agreement or degree of agreement or disagreement with positive and negative statements about mathematics.

Information on some of the affective assessment instruments which were developed for use at varying levels is reported in SUYDAM (1974). As can be noted from the reports on these instruments, several researchers have obtained correlations of their instruments with similar measures (e.g., Connelly, 1973; McClure, 1971; Mealy, 1971; Temple, 1972). Some studies have focused on such comparisons. For instance, EVANS (1971) examined the test-retest reliability coefficients of four arithmetic attitude scales: Dutton, Thurstone-type; Dutton, Likert-type; Anttonen; and a Semantic Differential. Coefficients ranged from .353 to .611; intercorrelations ranged from .587 to .827. These results indicated that the four scales sampled a common construct. MASTANTUONO (1971) also reported significant intercorrelations in comparisons of the two types of Dutton scales, a Guttman-type Hoyt scale, and a Semantic Differential.

2.2 Status of Attitudes

Many people believe that mathematics is disliked by most pupils -- or that it is just about the least favorite subject in the elementary school. But as SUYDAM and WEAVER (1970) point out,

> "It is true that in some surveys a significant proportion of pupils rated mathematics as the least liked of their school subjects. But it is equally true that in these surveys approximately the same proportion of pupils (at least 20%) cited mathematics as the best liked or the second best liked school subject (Chase, 1949; Chase and Wilson, 1958; Curry, 1963; Faust, 1963; Greenblatt, 1962; Inskeep and Rowland, 1965; Mosher, 1952; Rowland and Inskeep, 1963; Sister Josephina, 1959)." (p. 4)

In a recent study by ERNEST and others (1975) 1324 students in grades 2 through 12 were asked to rank mathematics, English, science, and social studies. Mathematics was liked best by 30% of the boys and 29% of the girls, and liked least by 27% of the boys and 29% of the girls. JACKS (1972), in a study with 80 pupils in grades 6 through 8, found that the favorite subjects were mathematics and reading. A statement from one study (Yamamoto et al., 1969) on the attitudes of 800 students in grades 6 through 9 reflects the reactions of even researchers when such a result is apparent:"Rather to our surprise (underlining added), mathematics fared quite well in students' ratings." (p. 204)

DUTTON (1968) supported the findings on how well children like mathematics with evidence from answers given on scales of items. DUTTON and BLUM (1968), reporting on a study with 346 students in grades 6 through 8, found that the most frequent reasons for disliking mathematics were: working problems outside of school, frustrating word problems, possibilities of making mistakes in arithmetic, and too many rules to learn. Favorable attitudes endorsed by pupils were that working with numbers is fun and presents a challenge, and that arithmetic makes one think, is logical, and is practical. CALLAHAN (1971) reported that 20% of the eighth graders he surveyed felt that they disliked mathematics, 18% were neutral, while 62% liked it. The need for mathematics in life was named most frequently as the reason for liking it; not being good in mathematics was cited most often as the reason for disliking it.

SUYDAM and WEAVER (197o) reported that "boys seem to prefer mathematics slightly more than do girls, especially toward the upper elementary school grades (Chase and Wilson, 1958; Dutton, 1956; Stright, 196o)." (p. 4) But CAPPS and COX (1969) found that girls in grade 4 had a more favorable attitude than boys did, with no significant differences in grade 5. And in the study by ERNEST and others (1975) cited previously, mathematics was the only subject in which no sex difference in preferences was observed. The evidence is thus unclear, but if there is a difference in attitude toward mathematics

by boys and girls, it is generally attributed in large part to a societally induced expectation.

Generally, attitudes toward mathematics tend to be more positive than negative in the elementary school. Children's attitudes appear to become increasingly less positive as they progress through school. EVANS (1971) found that grade 4 attitude scores were significantly higher than grade 6 scores. A decrease in scores on a semantic differential between grades 4 and 6 was noted by NEALE and PROSCHEK (1969), while NEALE, GILMER, and TISMER (197o) reported that attitudes toward school subjects was significantly less favorable at the end of grade 6 than it was at the beginning. ANTTONEN (1968, 1969) found that mean scores declined between grades 5-6 and grades 11-12. Examining measures of attitude, self-concept, and anxiety as one phase of the National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (NLSMA), CROSSWHITE (1972) reported that student attitude toward mathematics peaked near the beginning of junior high school.

2.3 Relationship between Attitude and Achievement

We believe that the affective component of learning is important: if children are interested in and enjoy mathematics, they will learn it better. However, research indicates that positive or negative attitudes toward mathematics appear to have only a slight causal influence on how much mathematics is learned. And it may well be that achieving well in mathematics has the effect of making attitudes more positive.

In Table I, findings from a number of studies conducted during the past decade and involving students of middle-school age are summarized. When significant correlations are found between attitude and achievement, they generally range between .20 and .40; that is, no more than 4% to 16% of the variance is accounted for. There is, however, a rough balance between studies in which no significant differences are reported and those in which any significant correlation was found.

2.4 Relationship between Attitudes of Students and Parents and/or Teachers

Peers probably have an influence on the attitudes of children, but there is little research evidence on this point. Research has tended to concentrate on the relationship between student attitudes and (1) teacher attitudes or (2) parental attitudes.

Teachers are viewed as being prime determiners of a student's attitude and performance. SMITH (1974), for instance, reported that students' perceptions of teachers were significantly correlated with mathematical growth in grades 4 through 6. ROSENBLOOM and others (1966) found that teaching effectiveness contributed significantly to the attitude and perceptions of pupils concerning their teachers and their methods, the school, text materials (SMSG), and the class as a group. However, KESTER (1969) found that seventh graders' attitudes were not significantly affected by teacher expectations. Perhaps that is good, considering that ERNEST and others (1975) found that, of a small sample of teachers (24 women and three men), 41% felt that boys did better in mathematics, while no one felt that girls did better.

It is also believed that parents determine the child's initial attitudes and affect their child's achievement. POFFENBERGER and NORTON (1959) stated that attitude toward mathematics is a cumulative phenomenon caused by one experience building on another. Attitudes are developed in the home and carried to the school; self-concepts in regard to mathematical ability are well established in the early school years, and it is difficult for even the best teacher to change them. Parents do indeed influence the child by their expectancy level, by their degree of encouragement, and by their own attitudes toward mathematics. Many parents expect above average work in general, but are satisfied with only average work in mathematics. Many students report that their parents say, "I'm poor in math", and feel that this gives them sanction for being poor.

TABLE I

STUDIES ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STUDENT ATTITUDE AND STUDENT ACHIEVEMENT

Study	Level	N	Instrument	Finding
Abrego (1966)	4	24	Dutton, rating	no significant relationship; no significant difference between boys and girls
Anttonen (1968, 1969)	5-12	6o7	Anttonen	low positive correlations
Beattie et al. (1973)	4	12o	SMSG scale (adapted)	difference in relationship of attitude to achievement for boys and for girls
Burbank (197o)	7	411	Dutton	positive correlation
Caezza (197o)	2-6	2765	Dutton	low correlation
Deighan (1971)	3,5,6	1o22	Anttonen, semantic differential	no significant relationship
Francies (1971)	4,6	18o	semantic differential	attitude of medium achievers significantly more positive than attitude of low achievers; no significant difference between boys and girls
Keane (1969)	4-6	679	Dutton, ranking	no relationship; no significant difference between boys and girls
Neale et al. (197o)	6	215	semantic differential	significant positive correlation between attitude toward school subjects and achievement for boys, but not for girls
Postlethwaite (1971)	8,12	12 countries	International Test	small positive correlations, in general
Tocco (1971)	7-9	15o	Dutton	directly related

TABLE 1

STUDIES ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STUDENT ATTITUDE AND STUDENT ACHIEVEMENT

	Level	N	Instrument	Finding
6)	4	24	Dutton, rating	no significant relationship; no significant difference between boys and girls
)	5-12	6o7	Anttonen	low positive correlations
al.	4	12o	SMSG scale (adapted)	difference in relationship of attitude to achievement for boys and for girls
7o)	7	411	Dutton	positive correlation
o)	2-6	2765	Dutton	low correlation
71)	3,5,6	1o22	Anttonen, semantic differential	no significant relationship
971)	4,6	18o	semantic differential	attitude of medium achievers significantly more positive than attitude of low achievers; no significant difference between boys and girls
)	4-6	679	Dutton, ranking	no relationship; no significant difference between boys and girls
.	6	215	semantic differential	significant positive correlation between attitude toward school subjects and achievement for boys, but not for girls
te	8,12	12 countries	International Test	small positive correlations, in general
)	7-9	15o	Dutton	directly related

Some studies have shown that attitudes of children tend to be more closely related to attitudes of mothers than to those of fathers (Burbank, 197o; Hill, 1967). ERNEST and others (1975) reported that mothers help children in mathematics more than fathers do in the elementary grades, but beginning with grade 6 the fathers help more.

Table II presents some recent studies on the relationship between student attitudes and parent and/or teacher attitudes. It should be noted that the effect of parent and teacher attitude on children's attitudes is unclear.

3. SELF-CONCEPT

How a child feels about himself and his concept of himself while doing mathematics are important components of the affective domain. If certain feelings are experienced over a period of time, they can lead to a particular self-image on the part of the child, which will influence what he expects of himself and affect his performance. Some studies have explored facets of the child's self-concept as it relates to mathematics instruction and learning.

In a study by KOCH (1972), a random sample of 602 sixth-grade students was given the Tennessee Self-Concept Scale and an achievement test. A significant relationship was found between student self-concept and mathematics achievement. There was no significant effect of teacher self-concept level on student achievement gains, and little effect of teacher content-competence on student achievement gains or levels of self-concept.

STILLWELL (1966) examined the self-concepts of sixth graders as they related to ability and achievement. Global self-concept showed no relationship with any of the selected achievement or intelligence scores. Student self-concept, however, displayed a highly significant relationship for boys, and a lower but still significant relationship for girls. For both sexes, specific role self-concept as an arithmetic student was signi-

TABLE II

STUDIES ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STUDENT ATTITUDE AND PARENT AND/OR TEACHER ATTITUDE

Study	Level	N	Instrument	Finding
Burbank (197o)	7	411	Dutton	parental attitudes significantly correlated with students' attitude
Caezza (197o)	2-6	2765	Dutton	pupils' attitudes not "aligned" with teachers' attitudes
Deighan (1971)	3,5,6	1022	Anttonen, semantic differential	teachers' and pupils' attitude not significantly correlated
Keane (1969)	4-6	679	Dutton, ranking	data inconclusive on relationship between pupil and teacher attitudes; teacher attitude had no effect on pupil achievement
Levine (1972)	3,4,6	164	ranking	mathematics ranked highest by pupils for 8 positive statements, not first on 1 negative statement; parents also thought of mathematics favorably when compared with English, science, and social studies
Levine (1973)	6-8	542	Likert scale	child's achievement level and mother's perception of child's attitude related; mother's and child's attitude correlated
Peskin (1966)	7	9 schools		no significant differences between teacher and pupil attitude or achievement scores; ordering of teacher and pupil attitudes related
Phillips (197o)	7	3o6		most-recent-teacher attitude significantly related to student attitude; type of teacher attitude met by pupil for 2 or for 3 of past 3 years significantly correlated to present attitude and achievement

TABLE II

IES ON THE RELATIONSHIP BETWEEN STUDENT ATTITUDE AND PARENT AND/OR TEACHER ATTITUDE

Level	N	Instrument	Finding
7	411	Dutton	parental attitudes significantly correlated with students' attitude
2-6	2765	Dutton	pupils' attitudes not "aligned" with teachers' attitudes
3,5,6	1022	Anttonen, semantic differential	teachers' and pupils' attitude not significantly correlated
4-6	679	Dutton, ranking	data inconclusive on relationship between pupil and teacher attitudes; teacher attitude had no effect on pupil achievement
3,4,6	164	ranking	mathematics ranked highest by pupils for 8 positive statements, not first on 1 negative statement; parents also thought of mathematics favorably when compared with English, science, and social studies
6-8	542	Likert scale	child's achievement level and mother's perception of child's attitude related; mother's and child's attitude correlated
7	9 schools		no significant differences between teacher and pupil attitude or achievement scores; ordering of teacher and pupil attitudes related
7	3o6		most-recent-teacher attitude significantly related to student attitude; type of teacher attitude met by pupil for 2 or for 3 of past 3 years significantly correlated to present attitude and achievement

TABLE II (Continued)

Study	Level	N	Instrument	Finding
Tocco (1971	7-9	150	Dutton	student attitude directly related to their reports of parents' attitudes
Van de Walle (1973)	3,6	3100	NLSMA scales (adapted)	no significant relationship between teachers' attitudes and perceptions, and student achievement
Wess (197o)	2-6	535	Dutton, Minnesota Teacher Attitude Inventory	no significant relationship between teacher and pupil attitude

ficantly related to achievement. Almost twice as many girls saw themselves noticeably better as readers than as arithmetics students.In all cases, significant correlations were found among various self-concept factors.

In setting out to examine the relationship between achievement in arithmetic and self-esteem, PEPER and CHANSKY (197o) noted that

> "valid measures of esteem are in short supply. ... Ratings of esteem are judgments of behavior. Measures based on judgment are vulnerable to many sources of distortion such as halo effect and generosity error." (p. 284)

They sought to compensate for such distortion by using a sociometric paired-comparison test, administered to 24 fifth graders in February and again in June. Teachers completed a paired-comparison test of pupils as arithmetic achievers. In general, there was considerable agreement among the rankings from February and June. There was slightly greater agreement between self-rankings and teacher-rankings than between self-rankings and (1) peer rankings or (2) objective-test rankings.

PRIMAVERA et al (1974) administered the Coopersmith Self-Esteem Inventory to 146 fifth- and sixth-grade students. Correlations between self-esteem and achievement were significant for girls but not for boys except on one test. It is suggested that the school plays a greater role in the affective ability of a girl's self-esteem because it is a major source of approval and praise for her, whereas boys can seek approval through athletics and other activities.

SMITH (1971) attempted to determine the effect of the male teacher on the male pupil. Twenty men and 21 women fifth-grade teachers teaching a total of 280 and 287 boys respectively were studied. It was found that boys with male teachers had significantly higher scores on school-related self-concept factors; no difference was found on two peer-related self-concept factors.

No significant difference in the self-concept of high and low achievers in grades 3 and 6 was found by DEVANE (1973).

When achievement was dichotomized into computational and reasoning ability, it was observed that the overachievers on both components had higher mean scores on items and factors of self-concept than did underachievers.

HAYES (1968) studied 144 sixth graders. He found that students with high arithmetic self-concept achieved significantly higher in arithmetic than did students with low arithmetic self-concept. No significant difference between the arithmetic self-concept of girls and boys was found. There was also a significant positive correlation between general self-concept of ability and arithmetic achievement.

In a study with 78 fourth graders, MESSER (1972) found that children who perceived their academic performance as contingent on their own effort and abilities had higher grades and achievement test scores than children who viewed their school performance as due to luck or the whims of others.

In studies by MOORE (1972) with fifth graders and BACHMAN (1969) with forth graders, it was found that self-concept and attitude toward mathematics were significantly related to achievement in mathematics. Moore noted that, while it may be concluded that self-concepts and attitudes toward mathematics influence achievement in mathematics, it is also reasonable to infer a reciprocal cause-effect realtionship between these variables.

In many studies, however, no significant relationship between self-concept and achievement was found. Many of these were studies which involved treatment groups of one type or another -- and in many instances, design flaws or problems were apparent.

MEDOFF (1974) conducted a descriptive study with 221 seventh graders to examine the relationships of components of the verbal interaction with pupil ability, pupil self-image, and the level of questioning in mathematics classes. No significant correlation was found between the amount of a student's verbal participation and his self-image.

BIRR (1969) was concerned with the need to incrase the child's self-concept of ability. The parents of 30 under-achieving seventh- and eighth-grade students were counseled in seven monthly meetings to find ways to increase their child's self-concept. Teachers were encouraged to use their expertise on another group of 30 students to effect an increase in self-concept. A third group of 30 students served as a control group. No significant association between self-concept of ability and grade-point average were found for any of the groups, nor were there significant differences between groups in either self-concept or grade-point average. A significant correlation was found, however, between the child's self-concept of ability and the parent's perception of the child's abilities.

HUNTER (1974) attempted to investigate whether self-concept and mathematics achievement are significantly related, whether either of two types of discussion group would improve self-concept, whether this would generalize to increased computation scores, if there were any sex differences, and how a teacher's rating of a child might be influenced by treatment intervention. Fifty-four fifth graders were randomly assigned to four treatment groups. No significant differences in treatment or sex were found in self-esteem results.

ZANDER (1973) attempted to ascertain if there were differences in how students viewed themselves as learners if they were taught by an interdisciplinary team of teachers, rather than by a set of different teachers. No significant differences were found between the team and non-team eighth graders (N = 185) on the three self-concept measures employed. Scores on only two of the three measures were significantly related to scores on two academic achievement measures.

PHELAN (1974) studied the achievement, self-concept, creativity, and attitude toward school of fourth-grade students in formal and informal education programs in Title I and non-Title I parochial schools. For the 400 students involved,

findings indicated (1) higher mean attitude-toward-school scores for those in the informal program and for those in Title I schools and (2) no significant differences between self-concept and certain creativity subtest scores.

A point made earlier bears repetition: extraneous variables must be controlled if research on independent variables of interest is to be of value. No significant differences, wether in achievement, self-concept, or other variables, is a perfectly valid finding -- providing the study is designed to produce valid findings.

4. ANXIETY

Is anxiety helpful in learning mathematics? In general, research (including a few studies in mathematics education) has shown that some anxiety facilitates achievement, but a high level of anxiety can be debilitating and negatively affect achievement. Comparatively little specific research on anxiety in mathematics education has recently been conducted, and findings are by-and-large not unexpected.

FORHETZ (1971), in a study with 247 pupils in grades 4 and 6, reported that pupils who ranked mathematics as difficult showed more test anxiety before a mathematics test than before a test in easy-ranked spelling. JONSSON (1966) found a significant interaction between level of test anxiety of sixth-grade girls and version of mathematics test (easy versus difficult). The high-anxious students who took the difficult version had the poorest performance.

In another study with sixth graders, Logiudice (197o) reported that a relationship existed between level of test anxiety and self-esteem which permits the definition of four subgroups of students. Satisfactory self-esteem was related to success in mathematics, while test anxiety was related to such things as an unsatisfactory attitude toward parents, poor attitude toward school, and a negative sense of self-worth.

DEGNAN (1967) studied 44 students in grade 8. Results indicated that there was a significant difference in the level of anxiety between the group of achievers and the group of underachievers, the former being more anxious. The achievers had a much more positive attitude and ranked mathematics significantly higher. HARTE (1967), in a study with 184 pupils in grades 2 through 8, found that high-defensive boys performed significantly higher in arithmetic than did high-anxious and low-defensive boys. No significant differences were found for girls.

ONER (1972) studied 160 sixth graders to examine the relationship of programmed instruction with or without feedback, and the effect of supportive and nonsupportive teacher responses. No significant treatment differences were found, but significant sex and anxiety effects on learning and achievement were noted. There were significant negative correlations between anxiety and (1) intelligence and (2) achievement scores. A consistency tendency was found for low-anxious girls, in particular, to perform better than other groups under all treatment conditions. Subjective observations indicated that the high-anxious children displayed more spontaneous behavior under supportive conditions, and more disturbed behavior under the non-feedback, supportive condition.

5. PERSONALITY FACTORS

Varied personality factors have been considered in relation to both attitude and achievement in mathematics. Correlations between attitudes and other aspects of personality are generally low. Such factors as self-control, personal adjustment and the needs for achievement, for endurance, and for order may be related to attitudes toward mathematics (Aiken, 1974).

CLEVELAND and BOSWORTH (1967, in a study with 282 sixth graders, found that higher achievers in mathematics (when compared to low achievers) made scores more indicative of a psy-

chologically healthy personality on eight scales of the California Test of Personality. Peer acceptance and acceptability each were significantly related to mathematics achievement, according to LAWTON (1971) after a study of 832 pupils in grades 5, 7, 9, and 11. PODOJIL (1972), analyzing data from 538 students in grade 7, found that level-of-aspiration scores were not significantly related to changes in mathematical interests or attitudes.

Several studies have analyzed achievement scores in relation to whether students were intuitive or reflective in type. MAY (1972), in a study with 295 students in grade 8, found no attitude differences, but intuitive-type students performed significantly better on achievement tests than sensing-type students did. REBHUN (1973) reported that students in grades 2 through 4 classified as reflective scored higher on mathematics tests than did children classified as impulsive.

POGGIO (1973), in a study with 604 sixth graders, concluded that grouping on the basis of personality characteristics was feasible, but factors on which to group differed for boys and girls.

It seems apparent that more research is needed on a variety of personality factors to ascertain which if any are of significance in planning for instruction in mathematics.

6. AFFECTIVE FACTORS IN RELATION TO A PROGRAM

Affective factors have frequently been included as one of several dependent variables in the evaluation of an instructional procedure or program. Several such studies have been discussed in the section on self-concept, and Table III presents a sampling of additional studies. No conclusions can be reached, because of the variability of the independent variables. Certainly it is important to note, however, that affective factors are an important variable to assess.

TABLE III

STUDIES ON AFFECTIVE COMPONENTS OF A PROGRAM

Study	Level	N	Finding
Bremmer (1973)	7,8 (1,4)	40	No significant differences in attitude were found when seventh and eighth graders tutored pupils in grades 1 and 4.
Edwards and DeVries (1972)	7	117	Students using a learning game and teams were more positive toward mathematics class than students in classes using quizzes. Those low- and average-ability students receiving team awards were more positive in attitude than similar students in individual-reward classes, but the reverse was true for high-ability students.
Dethmers (1969)	5,6	92	Children in a school using team planning, departmentalization, individualized instruction, and contracts scored significantly different from children in a self-contained class using conventional materials on the Sears Self-Concept Inventory.
Feldhake (1966)	7	427	The high group had more positive attitude toward the new mathematics program, whereas the average group had a more negative attitude.
Higgins (197o)	8	29 classes	Significant differences were found on six semantic differential scales pre and post use of laboratory units. However, the majority of the samples changed their attitude toward mathematics very little; the overall significance could be attributed to several relatively small "natural" groups.
Hollis (1972)	4-6	15o	Laboratories facilitated an increased positive attitude toward mathematics.
Malcom (1973)	7-9	2 schools	Significant differences in attitude favoring students using a teacher-developed individualized program over a traditional program were found at grades 7 and 9, but not grade 8.
Neufeld (1968)	4-6	324	In only 21 of 324 instances were high and low achievement-gain groups significantly different in personality characteristics for students using the Individualized Mathematics Curriculum Project approach.

TABLE III

STUDIES ON AFFECTIVE COMPONENTS OF A PROGRAM

Level	N	Finding
7,8 (1,4)	40	No significant differences in attitude were found when seventh and eighth graders tutored pupils in grades 1 and 4.
7	117	Students using a learning game and teams were more positive toward mathematics class than students in classes using quizzes. Those low- and average-ability students receiving team awards were more positive in attitude than similar students in individual-reward classes, but the reverse was true for high-ability students.
5,6	92	Children in a school using team planning, departmentalization, individualized instruction, and contracts scored significantly different from children in a self-contained class using conventional materials on the Sears Self-Concept Inventory.
7	427	The high group had more positive attitude toward the new mathematics program, whereas the average group had a more negative attitude.
8	29 classes	Significant differences were found on six semantic differential scales pre and post use of laboratory units. However, the majority of the samples changed their attitude toward mathematics very little; the overall significance could be attributed to several relatively small "natural" groups.
4-6	15o	Laboratories facilitated an increased positive attitude toward mathematics.
7-9	2 schools	Significant differences in attitude favoring students using a teacher-developed individualized program over a traditional program were found at grades 7 and 9, but not grade 8.
4-6	324	In only 21 of 324 instances were high and low achievement-gain groups significantly different in personality characteristics for students using the Individualized Mathematics Curriculum Project approach.

TABLE III (Continued)

Study	Level	N	Finding
Schaefer (1972)	7,8	311	Self-esteem did not appear to be affected by the individualized or traditional approaches used.
Smith (1973)	6-8		No significant differences in attitude or achievement were found between laboratory and non-laboratory groups.
Stern (1971)	3,4	308	Intraclass grouping of low achievers resulted in significant differences in attitude toward mathematics.
Stephens (1973)	7		No significant differences in attitude were found for different organizational structures.

TABLE III (Continued)

	Level	N	Finding
72)	7,8	311	Self-esteem did not appear to be affected by the individualized or traditional approaches used.
	6-8		No significant differences in attitude or achievement were found between laboratory and non-laboratory groups.
	3,4	308	Intraclass grouping of low achievers resulted in significant differences in attitude toward mathematics.
73)	7		No significant differences in attitude were found for different organizational structures.

7. CONCLUSIONS AND IMPLICATIONS

This review of research on some key non-cognitive variables in mathematics education in the middle-school grades leads to the statement of certain conclusions. Similar conclusions have been reflected in other reviews of research (e.g., Aiken 197oa, 197ob, 1972; Knaupp, 1973; Neale, 1969) on attitudes and other non-cognitive factors across the full span of schooling through the college level.

Research indicates that attitude toward mathematics is probably related to achievement in mathematics -- but whether more positive attitudes are the cause or the effect of higher achievement is debatable. The effect of peer, parent, teacher, or program on attitude toward mathematics (or other affective factors) is not clear from research. Attitudes are generally positive in the elementary school, possibly reaching a peak around the start of the junior high school. Self-concept may be related to achievement in mathematics. Anxiety and various other factors may play a role in children's performance in mathematics, but there is little definity in the research. The interactive effect of learning style has little support in research, but there is a general belief that such interaction exists.

Almost no research has been cited in which attitude or another affective factor was the manipulated, independent variable in an experimental study. Little research of this type exists -- largely because of the difficulty of manipulating affective factors. Associated with the paucity of studies is the fact that little research has indicated what researchers and teachers can do to improve the child's affective reaction toward mathematics. There is general agreement, however, that the teacher needs to be constantly alert for the attitudes which students are developing. While attitudes are not taught as such, they are believed to be conveyed as a byproduct of the teaching of content.

We can infer from research things that might or should be

helpful, and we add to these implications from what children tell us about their teachers and other persons, their environment, and their programs. And we also blend in what our own experiences, as teachers and as observers in the classroom, have led us to believe. The focus is on what the teacher can do, since this is a variable over which we, as researchers and as curriculum developers, can exert some degree of control.

Some beliefs which pervade our planning for mathematics instruction were stated by SUYDAM and WEAVER (197o):

> "Attitudes toward elementary school mathematics are probably formed and modified by many forces. The influence of other people could be named as one source: parents and other non-school-related adults, classmates and other children, and teachers in each of the grades.
>
> The way in which the teacher teaches seems to be of importance -- the methods and materials he or she uses, as well as his or her manner, probably affect pupils' attitudes.
>
> The subject itself undoubtedly has an influence on a child's attitude: the precision of mathematics when compared with many other subjects; the need for thorough learning of facts and algorithms; the "building block" characteristic wherein many topics are built and often dependent on previous knowledge. ...
>
> The learning style of the child is also an important factor to consider. The orderliness which discourages some is the very aspect which attracts others. (pp. 6-7)

Among the things that we believe to be important in instruction are that attitudes and self-concepts toward mathematics can be improved if:

.1 The teacher likes mathematics and makes it evident that he likes mathematics.

.2 Mathematics is an enjoyable experience, so that the child develops a positive perception of mathematics and a positive perception of himself in relation to mathematics.

.3 Mathematics is shown to be useful, both in careers and in everyday life.

.4 Instruction is adapted to students' interests.

.5 Realistic, short-term goals are established -- goals which pupils have a reasonable chance of attaining.

.6 Pupils are made aware of success and can sense progress toward these recognized goals.

.7 Provision is made for success experiences, to help the child to avoid failure and, in particular, repeated failure; diagnosis and immediate remedial help are imperative.

.8 Mathematics is shown to be understandable, through the use of meaningful methods of teaching.

As we conduct research, we must consider the need to (1) explore affective constructs more fully, and develop and experiment with valid instruments, and (2) incorporate as many affective factors as dependent variables (if not independent variables) as possible in each exploratory or controlled research study.

In short, we need to know more about the effect of non-cognitive variables and how to influence them !

LITERATUR

Abrego M.B. : Children's Attitudes Toward Arithmetic. Arithmetic Teacher 13: 2o6-2o8; March 1966

Aiken L.R. Jr. : Nonintellective Variables and Mathematics Achievement: Directions for Research. Journal of School Psychology 8: 28-36; March 197o

Aiken L.R. Jr. : Attitudes Toward Mathematics. Review of Educational Research 4o: 551-596; October 197o

Aiken L.R. Jr. : Research on Attitudes Toward Mathematics. Arithmetic Teacher 19: 229-234; March 1972

Aiken L.R. Jr. : Affective Variables and Sex Differences in Mathematical Abilities. Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association, April 1974. ERIC: ED 089 997

Anttonen R.G. : An Examination into the Stability of Mathematics Attitude and Its Relationship to Mathematics Achievement from Elementary to Secondary School Level. (University of Minnesota, 1967) Dissertation Abstracts 28A: 3o11-3o12; February 1968

Anttonen R.G. : A Longitudinal Study in Mathematics Attitude. Journal of Educational Research 62: 467-471; July/August 1969

Bachman A.M. : Factors Related to the Achievement of Junior High School Students in Mathematics. (University of Oregon, 1968) Dissertation Abstracts 29A: 2139; January 1969. (See also Journal for Research in Mathematics Education 1: 173-179; May 197o)

Beattie I. and others : The Relationship of Achievement and Attitudes Towards Mathematics in the Elementary School: A Longitudinal Study. Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association, February 1973. ERIC: ED 076 424

Birr D.J. : The Effects of Treatments by Parents and Teachers on the Self-Concept of Ability Held by Underachieving Early Adolescent Pupils. (Michigan State University, 1969) Dissertation Abstracts International 30A: 1354; October 1969

Bremmer B.L. : Students Helping Students Program, 1971-72. Final Report, USOE Project. ERIC: ED 074 473

Burbank I.K. : Relationships between Parental Attitude Toward Mathematics and Student Attitude Toward Mathematics, and between Student Attitude Toward Mathematics and Student Achievement in Mathematics. (Utah State University, 1968) Dissertation Abstracts International 30A: 3359-336o; February 197o

Caezza J.F. : A Study of Teacher Experience, Knowledge of and Attitude Toward Mathematics and the Relationship of These Variables to Elementary School Pupils' Attitudes Toward and Achievement in Mathematics. (Syracuse University, 1969) Dissertation Abstracts International 31A: 921-922; September 197o

Callahan W.J. : Adolescent Attitudes Toward Mathematics, Mathematics Teacher 64: 751-755; December 1971

Capps L.R.
Cox L.S. : Attitude Toward Arithmetic at the Fourth- and Fifth-Grade Levels. Arithmetic Teacher 16: 215-22o; March 1969

Cleveland G.A.
Bosworth D.L. : A Study of Certain Psychological and Sociological Characteristics as Related to Arithmetic Achievement. Arithmetic Teacher 14: 383-387; May 1967

Connelly R.D. : A Taxonomic Approach to the Evaluation of Attitudes of Prospective Elementary Teachers in a Mathematics Education Course. (Kent State University, 1972) Dissertation Abstracts International 34A: 613-614; August 1973

Crosswhite F.J. : Correlates of Attitudes Toward Mathematics. NLSMA Report No. 2o. Stanford, California: School Mathematics Study Group, 1972. ERIC: ED 084 122 (document not available from EDRS). (See also Wilson and Begle, editors, Correlates of Mathematics Achievement: Attitude and Role Variables, NLSMA Report No. 21, 1972)

Degman J.A. : General Anxiety and Attitudes Toward Mathematics in Achievers and Underachievers in Mathematics. Graduate Research in Education and Related Disciplines 3: 49-62; April 1967

Deighan W.P. : An Examination of the Relationship Between Teachers' Attitudes Toward Arithmetic and the Attitudes of Their Students Toward Arithmetic. (Case Western Reserve University, 197o) Dissertation Abstracts International 31A: 3333; January 1971

Dethmers C. : Self-Concept, Value Orientation, and Achievement Level of Lower Class Elementary School Children in Two Types of Educational Programs. (University of Minnesota, 1968) Dissertation Abstracts International 3oA: 579-58o; August 1969

Devane J.R. : An Exploratory Study of the Relationship Between Factors of Self-Concept and Over-Under Achievement in Arithmetic. (University of Georgia, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 4932-4933; March 1973

Dutton W.H. : Another Look at Attitudes of Junior High School Pupils Toward Arithmetic. Elementary School Journal 68: 265-268; February 1968

Dutton W.H. Blum M.P. : The Measurement of Attitudes Toward Arithmetic with a Likert-Type Test. Elementary School Journal 68: 259-264; February 1968

Edwards K.J. DeVries D.L. : Learning Games and Student Teams: Their Effects on Student Attitudes and Achievement. Report to USOE, December 1972. ERIC: ED 072 391

Ernest J. and others : Mathematics and Sex. Santa Barbara: University of California at Santa Barbara, January 1975. ERIC: SE 019 344

Evans R.F. : A Study of the Reliabilities of Four Arithmetic Attitude Scales and an Investigation of Component Mathematics Attitudes. (Case Western Reserve University, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 3086; December 1971

Feldhake H.J. : Student Acceptance of the New Mathematics Programs. Arithmetic Teacher 13: 14-19; January 1966

Forhetz J.E. : An Investigation of Test Anxiety as Measured by the TASC in Content Areas Ranked Difficult and Easy with Fourth and Sixth Grade Students. (Southern Illinois University, 1970) Dissertation Abstracts International 31A: 5124; April 1971

Francies H.D. : Arithmetic Attitudes and Arithmetic Achievement of Fourth and Sixth Grade Students in Urban Poverty-Area Elementary Schools. (Case Western Reserve University, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 1333; September 1971

Harte S.M.L. : Anxiety and Defensiveness as Related to Measurable Intelligence and Scholastic Achievement of Selected Institutionalized Children. (Fordham University, 1966) Dissertation Abstracts 27A: 2884; March 1967

Hayes E.J. : Relationships Between Self-Concept of Arithmetic Ability and Arithmetic Achievement in a Selected Group of Sixth Grade Students. (Michigan State University, 1967) Dissertation Abstracts 28A: 3999; April 1968

Higgins J.L. : Attitude Changes in a Mathematics Laboratory Utilizing a Mathematics-Through-Science Approach. Journal for Research in Mathematics Education 1: 43-56; January 1970

Hill J.P. : Similarity and Accordance Between Parents and Sons in Attitudes Toward Mathematics. Child Development 38: 777-791; September 1967

Hollis L.Y. : A Study of the Effect of Mathematics Laboratories on the Mathematical Achievement and Attitude of Elementary School Students. Final Report, USOE Project, July 1972. ERIC: ED 066 315

Hunter M.L. : Group Effect on Self-Concept and Math Performance. (California School of Professional Psychology, Los Angeles, 1973) Dissertation Abstracts International 34B: 5169; April 1974

Jacks W.R. : Attitudes, Preferences and Perceptions of Gifted Sixth and Eighth Grade Students. (University of Southern California,1971) Dissertation Abstracts International 32A: 445o-4451; February 1972

Jonsson H.A. : Interaction of Test Anxiety and Test Difficulty in Mathematics Problem-Solving Performance. (University of California, Berkeley, 1965) Dissertation Abstracts 26: 3757-3758; January 1966

Keane D.F. : Relationships Among Teacher Attitude, Student Attitude, and Student Achievement in Elementary School Arithmetic. (The University of Florida, 1968) Dissertation Abstracts International 3oA: 64-65; July 1969

Kester S.W. : The Communication of Teacher Expectations and Their Effects on the Achievement and Attitudes of Secondary School Pupils. (The University of Oklahoma, 1969) Dissertation Abstracts International 3oA: 1434-1435; October 1969

Knaupp J. : Are Children's Attitudes Toward Learning Arithmetic Really Important? School Science and Mathematics 73: 9-15; January 1973

Koch D.R. : Concept of Self and Mathematics Achievement. (Auburn University, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 1o81; September 1972

Lawton P.A. : Peer Relationships and Mathematical Achievement. A Study of the Relationship of Peer Acceptance and Peer Acceptability to Achievement in Mathematics. (New York University, 197o) Dissertation Abstracts International 31A: 6281; June 1971

Levine G. : Attitudes of Elementary School Pupils and Their Parents Toward Mathematics and Other Subjects of Instruction. Journal for Research in Mathematics Education 3: 51-58; January 1972

Levine G.I. : Actual and Perceived Attitudes Toward Mathematics of Pupils and Their Mothers. (Columbia University, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 396o; February 1973

Logiudice J.F. : The Relationship of Self-Esteem, Test Anxiety and Sixth Grade Students' Arithmetical Problem Solving Efficiency Under Variant Test Instructions. (St. John's University, 197o) Dissertation Abstracts International 31B: 2995-2996; November 197o

Malcom P.J. : Analysis of Attitude, Achievement, and Student Profiles as a Result of Individualized Instruction in Mathematics. (The University of Nebraska, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 3261-3262; January 1973

Mastantuono A.K.: An Examination of Four Arithmetic Attitude Scales. (Case Western Reserve University, 1970) Dissertation Abstracts International 32A: 248; July 1971

May D.C. : An Investigation of the Relationship Between Selected Personality Characteristics of Eighth-Grade Students and Their Achievement in Mathematics. (The University of Florida, 1971) Dissertation Abstracts International 33A: 555; August 1972

McClure W.C. : A Multivariate Inventory of Attitudes Toward Selected Components of Elementary School Mathematics. (University of Virginia, 1970) Dissertation Abstracts International 31A: 5941-5942; May 1971

Mealy E.C. : An Evaluation of the Use of Films as an Aid to Changing Students' Attitudes Toward Mathematics. (George Peabody College for Teachers, 1970) Dissertation Abstracts International 31B: 4852; February 1971

Medoff F.S. : A Study of Seventh-Year Classes in Science, Mathematics, English, and Social Studies to Determine the Relation of the Verbal Interaction with Pupil Ability, Pupil Self-Image, and Level of Questioning. (New York University, 1973) Dissertation Abstracts International 34A: 7607; June 1974

Messer St.B. : The Relation of Internal-External Control to Academic Performance. Child Development 43: 1456-1462; December 1972

Moore B.D. : The Relationship of Fifth-Grade Students' Self-Concepts and Attitudes Toward Mathematics to Academic Achievement in Arithmetical Computation, Concepts, and Application. (North Texas State University, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 4426; February 1972

Neale D.C. : The Role of Attitudes in Learning Mathematics. Arithmetic Teacher 16: 631-640; December 1969

Neale D.C. : School-Related Attitudes of Culturally Disadvantaged
Proshek J.M. Elementary School Children. Journal of Educational Psychology 58: 238-244; August 1967

Neale D.C. : Relationship Between Attitudes Toward School Subjects and
Gill N. School Achievement. Journal of Educational Research 63:
Tismer W. 232-237; January 1970

Neufeld K.A. : Differences in Personality Characteristics Between Groups Having High and Low Mathematical Achievement Gain Under Individualized Instruction. (The University of Wisconsin, 1967) Dissertation Abstracts 28A: 454o; May 1968

Oner N.P. : Impact of Teacher Behavior and Teaching Technique on Learning by Anxious Children. (University of Minnesota, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 6215; May 1972

Peper J.B. Chansky N.M. : Esteem and Achievement in Arithmetic. Elementary School Journal 7o: 284-288; February 197o

Peskin A.St. : Teacher Understanding and Attitude and Student Achievement and Attitude in Seventh Grade Mathematics. (New York University, 1964) Dissertation Abstracts 26: 3983-3984; January 1966

Phelan E.J. : Achievement, Self-Concept, Creativity and Attitude Toward School of Students in Formal and Informal Education Programs. (Fordham University, 1974) Dissertation Abstracts International 35A: 14oo-14o1; September 1974

Phillips R.B. Jr. : Teacher Attitude as Related to Student Attitude and Achievement in Elementary School Mathematics. (University of Virginia, 1969) Dissertation Abstracts International 3oA: 4316-4317; April 197o

Podojil L.F. : The Relationship Between Level of Aspiration and Change in Mathematical Interests and Attitudes Among Seventh Grade Students. (Kent State University, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 5o46; March 1972

Poffenberger T. Norton D. : Factors in the Formation of Attitudes Toward Mathematics. Journal of Educational Research 52: 171-176; 1959

Poggio J.P. : Prediction of Mathematics Achievement at the Sixth Grade Level Employing Selected Personality Characteristics of Students and Their Teachers. (Boston College, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 624o-6241; May 1973

Postlethwaite T.N. : International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) - The Mathematics Study. Journal for Research in Mathematics Education 2: 69-1o3; March 1971

Primavera L.H. Simon W.E. Primavera A.M. : The Relationship Between Self-Esteem and Academic Achievement: An Investigation of Sex Differences. Psychology in the Schools 11: 213-216; April 1974

Rabhun A.M. : The Reflective-Impulsive Dimension and Mathematical Performance in the Elementary School. (University of California, Los Angeles, 1973) Dissertation Abstracts International 34A: 3o39-3o4o; December 1973

Rosenbloom P.C. and others : Characteristics of Mathematics Teachers that Affect Students' Learning. Final Report, USOE Project, September 1966. ERIC: ED 021 707

Schaefer W.A. : The Relationship of Teaching Methods to Self-Esteem and Achievement in Mathematics Among Seventh and Eighth Grade Students. (Northern Illinois University, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 624; August 1972

Smith D.F. : A Study of the Relationship of Teacher Sex to Fifth Grade Boys' Sex Role Preference, General Self Concept, and Scholastic Achievement in Science and Mathematics. (University of Miami, 197o) Dissertation Abstracts International 31A: 4563; March 1971

Smith D.S. : The Relationship Between Classroom Means of Students' Perceptions of Teachers as Related to Classroom Racial Composition and Grade Level, and the Effects on Classroom Means of Academic Growth. (Western Michigan University, 1974) Dissertation Abstracts International 35A: 33o9; December 1974

Smith I.D. : Impact of Computer-Assisted Instruction on Student Attitudes. Journal of Educational Psychology 64: 366-372; June 1973

Stephens Ch.E. : A Multiple Time Sequence Design Applied in Seventh Grade Student Attitude Toward School in Two Schools With Contrasting Organizational Structure. Paper presented at the Meeting of the National Council on Measurement in Education, February 1973. ERIC: ED 086 742

Stern A.M. : Intraclass Grouping of Low Achievers in Mathematics in the Third and Fourth Grades. (University of California, Los Angeles, 1971) Dissertation Abstracts International 32A: 5539; April 1972

Stillwell L.J.R. : An Investigation of the Interrelationships Among Global Self Concept, Role Self Concept and Achievement. (Western Reserve University, 1965) Dissertation Abstracts 27A: 682; September 1966

Suydam M.N. Weaver J.F. : Attitudes and Interests. Bulletin A-1 in Using Research: A Key to Elementary School Mathematics. University Park, Pennsylvania: The Pennsylvania State University, 197o. ERIC: ED 038 283

Suydam M.N. : Unpublished Instruments for Evaluation in Mathematics Education: An Annotated Listing. Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, and Environmental Education, January 1974

Temple A.L.,Jr. : The Effectiveness of Semantic Differential Forms in Measuring Attitudes of Prospective Elementary School Teachers. (George Peabody College for Teachers, 1971) Dissertation Abstracts International 32B: 4o91-4o92; January 1972

Tocco T.S. : Student Attitudes, Perceived Parental Attitudes, and Socio-Economic Status as Predictors of Junior High School Mathematics Achievement. April 1971. ERIC: ED 052 017

Van de Walle J.A. : Attitudes and Perceptions of Elementary Mathematics Possessed by Third and Sixth Grade Teachers as Related to Student Attitude and Achievement in Mathematics. (Ohio State University, 1972) Dissertation Abstracts International 33A: 4254-4255; February 1973

Wess R.G. An Analysis of the Relationship of Teachers' Attitudes as Compared to Pupils' Attitudes and Achievement in Mathematics. (University of South Dakota, 1969) Dissertation Abstracts International 3oA: 3844-3845; March 197o

Yamamoto K. Thomas E.C. Karns E.A. : School-Related Attitudes in Middle-School Age Students. American Educational Research Journal 6: 191-2o6; March 1969

Zander B.J.J. : Junior High Students View Themselves as Learners: A Comparison Among Eighth Grade Students. (University of Minnesota, 1973) Dissertation Abstracts International 34A: 2254-2255; November 1973

MATHEMATISCHE FÄHIGKEITEN*

Norbert Biermann
Hans-Werner Niedworok

1. EINLEITUNG

Die von BERGIUS (1968) als unumstritten bezeichnete "interindividuelle Variation der intellektuellen Leistungsfähigkeit" (ebd.S.230) beeinflußte die didaktische Forschung, individuelle Lernvoraussetzungen zu erfassen und zu untersuchen, inwieweit diesen mit spezifischen Unterrichtsmaßnahmen im Hinblick auf eine Erhöhung des Lernerfolges entsprochen werden könne. Daß dieser Ansatz, durch gezielte Lehr- und Lernprozesse Lernleistungen zu steigern, überhaupt möglich und sinnvoll ist, haben ROTH u.a. (1968) mit ihrer Dynamisierung des Begabungsbegriffs überzeugend dargestellt.

Wird diesem Konzept im Unterricht Rechnung getragen, so können wir mit ROEDER (1974) Unterricht unter dem Aspekt der Interaktion von individuellen Lernvoraussetzungen und Curriculum betrachten, wobei allerdings jene Variablen außer acht gelassen werden, die Unterricht zu einem 'sozialen Ereignis' machen. Eine solche Interaktion konkretisiert sich in den jeweiligen Lernprozessen; ein Teilbereich der bei der Initiierung von Lernprozessen zu beachtenden individuellen Unterschiede in den Lernvoraussetzungen, die intellektuelle Leistungsfähigkeit (d.h. Leistungsdisposition, kristallisierte Intelligenz (Cattell 1963, deutsch 1973)) wird durch Rückschluß von Leistung, also von den Lernergebnissen, hypothetisch gewonnen. Obwohl ein Zusammenhang zwischen Disposition und Leistung angenommen wird, läßt diese Modellvorstellung keine Aussagen über Funktionsweisen von Dispositionen innerhalb eines Lernprozesses bezüglich eines Lernergebnisses zu.

Wollen wir das Feld der intellektuellen Leistungsfähigkeit

---

*Überarbeitete Kapitel aus BIERMANN/NIEDWOROK (1975)

bezeichnen, das für den spezifischen Bereich der Mathematik relevant ist, so sprechen wir von mathematischen Fähigkeiten. Hier vollzog sich, ähnlich wie beim Intelligenzkonzept, eine Entwicklung von einer globalen zu einer immer differenzierteren Auffassung. Dabei lassen sich folgende Positionen nennen

- mathematische Fähigkeit als einheitlicher Komplex, auf die gesamte Mathematik bezogen; etwa 'mathematische Begabung' (vgl.Möbius, 19o7)
- mathematische Fähigkeiten, als einheitlicher Komplex auf verschiedene mathematische Leistungsbereiche bezogen; etwa 'algebraische Fähigkeit', 'arithmetische Fähigkeit', 'geometrische Fähigkeit' (vgl.Oldham 1937)
- mathematische Fähigkeiten, als Mannigfaltigkeit von Fähigkeiten, die jeweils auf den Gesamtbereich der Mathematik bezogen sind, etwa 'Reduktionsfähigkeit', 'Verallgemeinerungsfähigkeit' (vgl.Krutetskii 1966a,b)
- mathematische Fähigkeiten, als Mannigfaltigkeit von Fähigkeiten mit jeweils unterschiedlicher Ausprägung in den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, in der neueren Literatur auch 'mathematische Leistungsdimensionen' (vgl. Treumann 1974) genannt; etwa 'Raumvorstellung'.

Mathematik / Fähigkeiten	global	differenziert
global	MÖBIUS	OLDHAM
differenziert	KRUTETSKII	TREUMANN

deskriptiver Ansatz — empirischer Ansatz

Abbildung 1 (Verf.) — Positionen bei der Untersuchung mathematischer Fähigkeiten

Diese exemplarisch aufgelisteten Positionen beruhen jedoch auf höchst unterschiedlichen Forschungsansätzen und Untersuchungsmethoden. Untersuchungen mathematischer Fähigkeiten lassen sich global einteilen in intelligenztheoretisch orientierte faktorenanalytische und denkpsychologisch orientierte deskriptive Studien. Für Vertreter der faktorenanalytischen Richtungen steht das Produkt eines Lern- oder Lösungsprozesses im Vordergrund, um von diesem auf Dispositionen zurückschließen zu können; der Prozeß selbst bleibt im Dunkeln (Black-Box-Modell). Hingegen beobachten Vertreter einer denkpsychologisch orientierten Richtung den Verlauf des Problemlöseprozesses, einige empirisch, andere rein phänomenologisch, um diejenigen Qualifikationen zu beschreiben, über die ein Lernender bei der erfolgreichen Bearbeitung mathematischer Problemstellungen verfügt.

2. MATHEMATISCHE FÄHIGKEITEN UND INTELLIGENZFAKTOREN

Die faktorenanalytische Intelligenzforschung analysiert die Ergebnisse standardisierter objektiver Leistungstests, isoliert nach bestimmten multivariaten Verfahren Faktoren, die als Leistungen determinierend angenommen und aufgrund der in ihnen ladenden Tests als intellektuelle Fähigkeiten interpretiert werden. Dabei bleiben allerdings charakteristische Verlaufseigenschaften des Lösungsprozesses von Aufgabenstellungen unbeachtet. An den Ergebnissen der Faktorenanalyse sind sowohl die Ausprägung einzelner Faktoren als auch die Anteile des zugrundeliegenden Materials am Zustandekommen der jeweiligen Faktoren erkennbar.

Sofern das Testmaterial mathematikbezogen ist, werden die extrahierten Faktoren als mathematische Fähigkeiten interpretiert. In der Auswahl und Interpretation des Testmaterials schlägt sich der intelligenztheoretische Überbau nieder, so daß mathematische Fähigkeiten als Bestandteile einer umfassenden Theorie intellektueller Fähigkeiten erscheinen. Somit ist es möglich, auch solche Fähigkeiten, die bei mathematischen, aber auch bei anderen Problemstellungen zum Tragen

kommen, als mathematische Fähigkeiten zu bezeichnen. Intelligenzfaktoren können also sowohl als bereichsspezifisch und materialabhängig aufgefaßt werden, etwa als Fähigkeiten, die speziell für Leistungen in Mathematik verantwortlich sind, als auch als materialunabhängige allgemeine intellektuelle Fähigkeiten, die dann - mehr oder weniger stark - auch mathematische Leistungen determinieren. Mathematische Fähigkeiten stellen sich als eine "charakteristische Konstellation von intellektuellen und kognitiven Grundfähigkeiten" dar (Bottenberg und Maiwald, 1972, S.11).

> "Mathematische Leistung beruht auf einer eigenen mehr oder weniger straffen Gruppe von Intelligenzfunktionen und partizipiert zugleich erheblich an der allgemeinen Intelligenz. Diese Position hat weite theoretische und empirische Anerkennung gefunden" (ebd.S.10).

Andererseits ist es nicht weiter verwunderlich, mathematische Fähigkeiten als Bestandteile einer umfassenden Theorie intellektueller Fähigkeit zu erkennen, fällt doch bei Sichtung des den jeweiligen Intelligenzmodellen zugrundeliegenden Testmaterials auf, daß dieses vorwiegend 'mathematischen' Charakter hat, weil es auf numerischen, figürlichen, symbolischen oder logistischen Problemstellungen beruht.

Zusammenfassend kann 'mathematische Fähigkeit', wie VERY (1967) feststellt, als ein Konstrukt angesehen werden, das aus einer Anzahl voneinander getrennter Faktoren mit inneren Zusammenhängen besteht.

> "Each factor has not yet been clearly isolated, but the area in general would include those abilities essential to quantitative thinking; in a more abstract sense it would include the ability to discover, manipulate, and evaluate relationships. Judging, estimating, inducing, and deducing the mechanics of these relationships are essential processes" (ebd.S.172).

Ein kurzer Überblick über fünf wesentliche Intelligenzmodelle zeigt, welchen Raum mathematische Fähigkeiten innerhalb dieser Modelle einnehmen. Unter ihren Hauptvertretern SPEARMAN (1927), BURT (1949) und VERNON (1961) entwickelte sich eine Richtung der Intelligenzforschung zur 'Hierarchischen Faktorentheorie der Englischen Schule'. Neben einem allgemeinen, bereichsunabhängigen Faktor 'g' (general), der den größten Teil der Testleistungen erklärt, und einer Reihe

(bereichs-) spezifischer Faktoren werden Gruppenfaktoren unterschiedlicher Komplexitätsebenen in hierarchischer Ordnung zusammengefaßt. Die Relevanz eines allgemeinen Intelligenzfaktors für mathematisches Problemlösen sieht BLACKWELL (1940) in

> "the power of selective, quantitative thinking and deductive reasoning, involving the ability to apply general principles to particular classes in number, symbolic and geometric work, to abstract, to generalize, and use the essential figures of a given complex situation, and to make deductions from these for the elucidation of other complex situations. This therefore is the central intellective factor in the mathematical ability of boys and girls" (ebd.S.218).

Den in der Hierarchie folgenden Hauptgruppenfaktoren 'v:ed' (verbal, numerical, educational) und 'k:m' (practical - mechanical - spatial - physical) lassen sich entsprechende, teils überlappende Gruppenfaktoren zuordnen, und zwar fachübergreifende, wie 'räumliches Vorstellungsvermögen', oder fachspezifische Faktorenbündel, wie der 'mathematische Gruppenfaktor'.

> "There is a close connection between mathematical and general ability. High intelligence is the most important single factor for success in mathematics... . In addition, there exists a clearly identifiable mathematical group factor. The different branches of mathematics are linked together more closely, than they would be if a general factor only were in operation... . Verbal, spatial and numerical group factors were isolated" (Wrigley 1958, S.61).

Die spezifischen Mathematikfaktoren werden von den verschiedenen Autoren unterschiedlich angegeben. Es sind daher auch Überlappungen untereinander oder mit Gruppenfaktoren festzustellen. Beispielsweise schlägt BARAKAT (1951) vor, den mathematischen Gruppenfaktor als Komplex in einen "sub-factor for mechanical arithmetic (closely related to memory) and another for mathematic work (closely related to the manipulation of schemes and relations)" zu unterteilen und auf die verschiedenen Zweige der Mathematik zu beziehen (ebd.S.156).

THURSTONEs (1938) Modell der 'primary mental abilities', von ihm selbst nur als vereinfachende erste Näherung betrachtet, beinhaltet die sieben Primärfähigkeiten

- Space (S)
- Number (N)
- Verbal Comprehension (V)
- Verbal Fluency (W)
- Memory (M)
- Reasoning (R)
- Perceptual Speed (P),

die in keinem Ordnungszusammenhang, sondern vielmehr mosaikartig nebeneinanderstehen, lediglich überlagert von einem oder mehreren 'general factors' zweiter Ordnung. Diese Gruppenfaktoren bzw. Faktorengruppen faßt er als unabhängige Funktionseinheiten auf und nennt sie die "principle landmarks in mental ability" (ebd.S.4), betrachtet sein Modell aber gleichzeitig als offenes System, dem weitere 'landmarks' hinzugefügt werden können.

Der Faktor 'Number', der auf numerische Tests beschränkt ist, wird zunächst als 'rein mathematischer Faktor' angesehen und interpretiert als "facility in numerical calculation" (ebd. S.82), als "die Fähigkeit, relativ einfache Rechenoperationen (Additionen, Multiplikationen usw.) auszuführen" (Jäger 1967, S.79). Jedoch schließt Thurstone nicht aus, "that the factor N may be more basic and general than number" (Thurstone 1938, S.83). Er vermutet vielmehr, daß man auch zahlenfreie Tests mit hoher Ladung auf N finden könne.

'Verbal Comprehension' bezeichnet eine Befähigung, die ihren Einfluß auch im mathematischen Bereich aufweist, nämlich die Fähigkeit, Ideen und Bedeutungen von Worten zu erfassen und sprachliche Beziehungen wahrzunehmen.

'Verbal Fluency' bezeichnet eine Funktionseinheit, die "die Flüssigkeit des Wortzusammenhanges ohne besondere Berücksichtigung der Wortbedeutungen" (Jäger 1967, S.80) repräsentiert, also auf sprachliches Material beschränkt ist. Ein verschiedene Materialarten umfassender Fluency-Faktor wurde von Thurstone nicht gefunden.

Mit dem Faktor 'Memory' glaubt Thurstone einen von vermutlich

zahlreichen Gedächtnisfaktoren identifiziert zu haben, der vorrangig mechanische unmittelbare Gedächtnisleistungen kennzeichnet, "z.B. die Reproduktion von unmittelbar vorher eingeprägten Zahlen, Wörtern oder Wort-Zahl-Kombinationen" (ebd. S.80), so daß man zu recht einen Gedächtnisfaktor hinter bestimmten Mathematikleistungen vermuten darf.

Mit 'Reasoning' wird ein Funktionskomplex zusammengefaßt, der die Faktoren 'Induction' (I) als die Fähigkeit, aus gegebenem Material Regeln oder Prinzipien offenzulegen, 'Deduction' (D) als Fähigkeit, diese Regeln nicht nur zu erkennen, sondern auch anzuwenden, und einen 'indefiniten' Faktor (R) als die Fähigkeit zu logischem Schlußfolgern umfaßt. Er ist nicht materialgebunden, schlägt sich aber wesentlich in Mathematikleistungen nieder, die logisches Schließen erfordern, was durch zahlreiche Untersuchungen zur Faktorenstruktur mathematischer Leistungen bestätigt wird (vgl.Treumann 1974).

Durch 'Perceptual Speed' werden Leistungen bestimmt, bei denen es darauf ankommt, in irrelevantes Material eingebettete Details möglichst schnell optisch wahrzunehmen und zu erfassen. Thurstone teilte diesen Faktor in zwei selbständige Funktionseinheiten: 'Speed of Closure' und 'Flexibility of Closure'. P dürfte vermutlich bei solchen Mathematikleistungen eingehen, die unter irgendeinem Leistungsdruck entstehen, wie es beispielsweise in Testsituationen oder bei schulüblicher Leistungsmessung der Fall ist.

Thurstones Faktor 'Space' wird als Fähigkeit des räumlichen Vorstellungsvermögens, als "facility in spatial and visual imagery" (Thurstone 1938, S.80) interpretiert. Dieser Faktor, in fast allen Nachuntersuchungen bestätigt, teilweise als einheitlicher Gruppenfaktor, teilweise als Verbund zweier Gruppenfaktoren, 'Spatial Relations' (S_1) und 'Visualization' (S_2) (vgl.Thurstone und Thurstone 1949), ist insbesondere im geometrischen Bereich relevant.

Thurstones Modell führte in der Folgezeit zu einer förmlichen Inflation von weiteren, eher speziell zu nennenden Fähigkeiten.

Der positive Aspekt des von Guilford und Mitarbeitern entwickelten "Structure-of-Intellect" (S-I)-Modells besteht darin, Anhaltspunkte für eine Systematik und Ordnung der voneinander isolierten Faktoren zu geben und gleichzeitig bislang stiefmütterlich behandelte Kreativitätsfaktoren zu berücksichtigen. Da Guilford und Mitarbeiter Intelligenz als Funktion von Gedächtnis und Denken sehen, als elementare Denkprozesse Wahrnehmung, Produktion und Evaluation annehmen und schließlich konvergente und divergente Produktion unterscheiden, ergeben sich unter dem Aspekt der Denkoperationen als Systematik die folgenden Fähigkeitsklassen

- Cognition (C)
- Memory (M)
- Convergent Thinking (N)
- Divergent Thinking (D)
- Evaluation (E).

Die Denkoperationen werden in Beziehung gesetzt mit Material bzw. Inhalt (Contents) und Art des Produkts (Product) der jeweiligen Denkoperationen."Contents" umfaßt die Klassen

- Figural (F)
- Symbolic (S)
- Semantic (M)
- Behavioral (B),

Produkte der Denkoperation sind

- Units (U)
- Classes (C)
- Relations (R)
- Systems (S)
- Transformations (T)
- Implications (I).

Durch Kreuzklassifikation gewonnene Matrizen werden in ein Würfel-Modell eingeordnet, dessen Dimensionen durch die Klassifikationsprinzipien "Operations", "Contents", "Products" dargestellt werden (vgl.Guilford/Hoepfner 1971). Auf diese Weise lassen sich (5x4x6=) 120 verschiedene Arten von Intelligenzfaktoren angeben, die inzwischen zum größten Teil

identifiziert worden sind, nicht alle eindeutig, einige sogar noch weiter differenziert. Die Faktoren werden durch die Buchstaben der Kreuzklassifikation in der Reihenfolge Operation - Material - Produkt benannt.

Bei diesem Intelligenzmodell ist aufgrund des Fehlens 'mathematischer' Faktoren offensichtlich, daß mathematische Fähigkeiten unter allgemeinen intelligenten Fähigkeiten subsumiert werden.

Intellektuale Operation	Dimensionen des SI-Modells, die bei mathematischer Schulleistung eine Rolle spielen
Evaluation	EMR (EMT) EMI ESR ESS EST (ESI)
Convergent Production	NMR NMS NMI NSR NSS NST NSI NFR NFT
Divergent Production	(DMU) DMR DMS (DMT) (DMI) DSU DSC DSR DSS DSI DFS
Cognition	CMU CMC CMS (CMI) (CSU) CSC CSR CSS CSI CFC CFR CFS CFT CBS
Memory	MMI MSI MFR

Abbildung 2
(nach: Treumann, 1974, S.358)
( )-Ergänzungen durch Verf.

Klassifikatorischer Ansatz zur Feinstruktur mathematischer Leistungen nach dem SI-Modell

Guilford und Mitarbeiter analysierten mathematische Leistungstests und listeten die gefundenen Faktoren als mathematische Fähigkeiten auf, wobei sie übrigens die bis dahin bekannten mathematischen Fähigkeiten mit einordneten (vgl. Petersen u.a. 1963, Guilford 1965). TREUMANN (1974) nennt 37 S-I-Faktoren 'mathematische Fähigkeiten'(vgl.ebd. S.358), andere finden bei Durchsicht der Literatur 44 mathematikrelevante Intelligenzfaktoren (vgl. Biermann/Niedworok 1975; siehe Abb.2). Unter diesen nehmen Faktoren der Symbolklasse eine zentrale Stellung ein, etwa NSR (convergent production of symbolic relations). Interessanterweise zeigen sich beim Vergleich mathematischer und kreativer Fähigkeiten Übereinstimmungen: von 22 Faktoren, die als Kreativitätsfaktoren bezeichnet werden (vgl.Guilford 195o, 1967; Guilford/Hoepfner 1971; Frick u.a.1959; Merrifield u.a.1962) lassen sich 14 bei der Analyse mathematischer Fähigkeiten wiederfinden.

In MEILIs (1943/44) Modell der 'grundlegenden Eigenschaften der Intelligenz' werden Intelligenzfaktoren als "allgemeine notwendige Bedingung(en) jedes Intelligenzaktes" aufgefaßt (Meili 1964, S.140).

> "Da die Faktoren ganz allgemeine geistige Struktureigenschaften erfassen wollen, sind sie prinzipiell in jedem geistigen Akt wirksam",

charakterisiert Meilis Schüler Weber (1953, S.336f.) diesen Ansatz.

Meilis Theorie läßt es nicht zu, Intelligenz von "Materialtypen" her zu bestimmen und damit so etwas wie sprachliche, visuelle oder numerische Intelligenz zu betrachten (vgl.ebd. S.336ff.) Es ist daher nicht möglich, bei der Untergliederung des Konstrukts 'Intelligenz' in verschiedene Fähigkeitskonstrukte die spezifisch mathematischen Fähigkeiten zu isolieren. Vielmehr erweist es sich auch hier, daß Fähigkeiten, die wir hinter mathematischen Leistungen stehend vermuten, auch bei anderen intelligenten Leistungen wirken.

Meilis Faktoren haben funktionalen Charakter, indem die den

meßbaren Intelligenzleistungen zugrundeliegenden Denkleistungen als Problemlöseprozesse, als Prozesse der Umstrukturierung, Umzentrierung und Reorganisation angesehen werden (vgl.Hedinger 1965, S.339); damit werden die Faktoren aus den gestaltpsychologischen Prinzipien DUNCKERs (1935) und WERTHEIMERs (1945) hergeleitet und die faktorenanalytischen Befunde gestaltpsychologisch interpretiert (vgl. Meili 1964).

Im Gegensatz zur Englischen Schule bestimmte Meili nicht einen, sondern vier allgemeine Faktoren, die die wesentlichen Aspekte intellektueller Problemlösungsprozesse abdecken und die somit auch bei produktiven Problemlöseprozessen in der Mathematik wirksam sind, und zwar

- Komplexität (K)
- Globalisation (G)
- Plastizität (P) sowie einen Faktor
- Fluency/Flüssigkeit (F), den er allerdings nicht eindeutig den 'Allgemeinen Faktoren' zuzuordnen vermochte.

Neben diesen allgemeinen Faktoren werden 'Gruppenfaktoren' aufgeführt, die bei bestimmten Gruppen von Testaufgaben auftauchen:

- Space (S)
- Verbal (V)
- Numerical (N) sowie
- Fluency (F), wenn dieser nicht als allgemeiner Faktor aufgefunden werden kann.

Der Faktor 'Komplexität' ermöglicht die genaue Erfassung und den Aufbau komplexer Strukturen, die "Bildung vieler und exakter Beziehungen zwischen verschiedenen Gegebenheiten" (Weber 1953, S.383). Eine Untersuchung SCHAEDELIs (1961) ergab hohe Sättigungen sämtlicher vier verwendeter Zahlentests in diesem Faktor.

'Plastizität' ist verantwortlich für die Umstrukturierung von Problemsituationen, für das Aufbrechen bestehender Struk-

turen und ihre Umformung in neue Strukturen. Dieser Faktor bedeutet "eine gewisse geistige Beweglichkeit, die uns befähigt, eine bestimmte Beziehung oder Situation auch von einem anderen als dem bisherigen Gesichtspunkt zu betrachten" (Weber 1953, S.367).

'Globalisation' bezeichnet die " 'Kondensation' mehrerer Elemente zu einer Idee" (ebd.S.363) und ermöglicht das Zusammenfassen getrennter Gegebenheiten unter einem Gesichtspunkt und die Bildung neuer Einheiten oder Ganzheiten.

'Fluency' bestimmt einerseits die Leichtigkeit und Schnelligkeit der Produktion von Einfällen und den Ideenreichtum beim Lösen von Problemen; darüber hinaus bezeichnet dieser Faktor die "Leichtigkeit und Flüssigkeit des Übergangs von einer 'Idee' zur anderen" (ebd.S.363), die Fähigkeit, sich von eben gebildeten Ideen zu lösen.

'N' bezieht sich auf den numerischen Bereich und dürfte daher mit Leichtigkeit als ein ausschließlich 'mathematischer' Faktor identifiziert werden. Er kann - so WEBER (1953, S.371) - für "die Leichtigkeit und Flüssigkeit in der Ausführung arithmetischer Operationen verantwortlich gemacht werden".

Eine Beziehung des sprachlichen Faktors 'V' zur Mathematik ergibt sich aus dem allgemeinen Zusammenhang von Sprache und Mathematik. Sprachliche Fähigkeiten erweisen sich im Mathematikunterricht deswegen als unerläßlich, weil Mathematik in der Regel im Medium Sprache vermittelt, als logische Sprache behandelt und von den Schülern im Medium Sprache mitgeteilt wird.

Der Gruppenfaktor 'Space' kann ebenfalls als ein für Mathematikleistungen zuständiger Faktor bezeichnet werden. Er wirkt in Problemlöseprozessen, in denen es auf räumliches Vorstellungsvermögen ankommt, etwa in der Geometrie oder im R^3, aber auch in 'außermathematischen' Situationen.

JÄGER (1967) überprüfte auf der Grundlage einer eigenen Erhebung die bis hierhin beschriebenen Modelle mit ihren Intel-

ligenzfaktoren. Da sich nicht alle Intelligenzfaktoren bestätigen ließen, andere Befunde wiederum nicht in die Schemata bekannter Intelligenzstrukturmodelle einfügen ließen, organisierte Jäger diese Befunde in einem eigenen Intelligenzstrukturmodell. Die in diesem Modell angeordneten 'Dimensionen der Intelligenz', die ihrerseits in die Persönlichkeitsstruktur eingebettet sind, werden bildhaft als 'Knoten' eines n-dimensionalen 'Netzes' innerhalb eines n-dimensionalen Faktorenraumes aufgefaßt. Ein Ausschnitt dieses Modells wird durch die 'Hauptdimensionen' repräsentiert:

(1) Anschauungsgebundenes Denken
(2) Einfallsreichtum und Produktivität
(3) Konzentrationskraft und Tempomotivation, insbesondere bei einfach strukturierten Aufgaben
(4) Verarbeitungskapazität, formallogisches Denken und Urteilsfähigkeit
(5) Zahlengebundenes Denken
(6) Sprachgebundenes Denken

Bei diesem Modell werden allerdings weder eine "hypothetische Spitze" der hierarchischen Ordnung, etwa ein g-Faktor erfaßt, noch lassen sich die Hauptdimensionen als "elementare Funktionseinheiten" bezeichnen (ebd.S.181). Wir müssen auch bei diesem Modell die Dualität von mathematischen und allgemein-intelligenten, globalen Fähigkeiten konstatieren, da sich alle Faktoren als für mathematische Leistungen relevant erweisen.

Faktor (1) 'Anschauungsgebundenes Denken' wird primär vom Material, den figuralen Aufgaben, her interpretiert, jedoch wird angenommen, daß einige weitere Faktoren hoher Allgemeinheitsgrade eingegangen sind, wie etwa "visuelle Auffassungsgabe", "allgemeine Auffassungsgabe" und "Performance" als Repräsentant praktischer Intelligenz (vgl.ebd.S.154ff).

Faktor (2) 'Einfallsreichtum und Produktivität' zeigt sich im Hinblick auf produktive Mathematikleistungen als der be-

deutsamste Faktor; dieser erweist sich als nicht materialgebunden.

> "Die hier herausgearbeitete Fähigkeit bestimmt die Leistungen bei Aufgaben, welche Einfälle, Flüssigkeit, Variabilität und Reichtum der Vorstellungen und das Sehen vieler verschiedener Seiten, Varianten, Eigenschaften, Gründe und Möglichkeiten eines Problems fordern, zugleich aber problemorientierte Lösungen, kein ungesteuertes Luxurieren der Phantasie" (ebd.S.176).

Faktor (3) 'Konzentrationskraft und Tempomotivation, insbesondere bei einfach strukturierten Aufgaben' kommt überwiegend dann zum Tragen, wenn "angespannte Konzentration und rasche Auffassung gefordert werden und das Resultat vornehmlich von der Tempo-Motivation, vielleicht auch Komponenten wie Streßresistenz, Störbarkeit u.a. abhängig ist" (ebd. S.176). Auch dieser Faktor erweist sich angesichts der augenblicklichen Praxis der mathematischen Leistungsmessung wie der Intelligenzdiagnostik als ein "mathematischer" Faktor.

Faktor (4) 'Verarbeitungskapazität, formallogisches Denken und Urteilsfähigkeit' ist die Funktionseinheit benannt, von der Jäger feststellt, daß sie als "eigentlicher Kern der Intelligenz" anzusehen ist. Verarbeitungskapazität, formallogisches Denken und Urteilsfähigkeit bestimmen "die Leistung bei komplexeren Aufgaben, welche nicht auf Anhieb zu lösen sind, sondern Heranziehen, Verfügbarhalten, Überblicken, In-Beziehung-Setzen und sachgerechtes Beurteilen von vielfältigen Informationen fordern" (ebd.S.176).

Faktor (5) 'Zahlengebundenes Denken' und Faktor (6) 'Sprachgebundenes Denken' sind, wie Jäger ausführt, durch die Gemeinsamkeit zahlengebundener und sprachgebundener Aufgabenstellungen gekennzeichnet. Sie repräsentieren vermutlich den Grad der Aneignung und Verfügbarkeit der beiden erworbenen Beziehungssysteme "Zahlen" und "Sprache". Wobei, wie anzumerken bleibt, diese auch auf die übrigen Faktoren einwirken.

Zwar erweist sich Jägers Intelligenzmodell als recht global, es zeigt aber doch den Stellenwert "mathematischer" Faktoren. Da es in seinen begrifflichen Kategorien nicht von der Rigi-

dität der Guilfordschen Auffassung des Intellekts als Tripel von Operationen, Inhalten und Produkten ausgeht, sondern eine Verbindung zu anderen Persönlichkeitsvariablen offenläßt und weil es aufgrund seiner Überschaubarkeit auch leicht mit anderen Intelligenzmodellen in Beziehung gesetzt werden kann, ließe es sich als begriffliche Grundlage, als Kategorienschema akzeptieren, um vor diesem Hintergrund die bereits genannten mathematischen Fähigkeiten der anderen Intelligenzmodelle synoptisch zu erfassen (vgl.Biermann/Niedworok 1975).

Eine Trennung nach faktorenanalytischen (=produktorientierten) und deskriptiven (=prozeßorientierten) Forschungsansätzen, wie wir sie im folgenden vornehmen, bleibt jedoch willkürlich; bei der Interpretation von Faktoren lassen die meisten Autoren erkennen, daß sie sich auf begriffliche Kategorien aus deskriptiven Ansätzen berufen (vgl.Werdelin 1958), andere suchen eine Verbindung von Produkt- und Prozeßaspekt innerhalb eines faktorenanalytischen Ansatzes (vgl.Meili 1943/44).

3. DESKRIPTIVE ANSÄTZE ZUR ANALYSE MATHEMATISCHER FÄHIGKEITEN

Im Gegensatz zur faktorenanalytischen Richtung, die übrigens vorwiegend von der behavioristischen Lernpsychologie, neuerdings auch von einigen marxistischen Autoren (vgl.Haenschke-Kramer/Mehl 1967; Guthke 1972) vertreten wird, wird in deskriptiven Ansätzen versucht, auf der Grundlage der Beobachtung mathematischer Problemlöseprozesse zu einer qualitativen Charakterisierung mathematischer Fähigkeit(en) zu kommen. Die deskriptive Richtung geht von beobachtenden, vereinzelt introspektiven Verfahren aus (vgl.Hadamard 1945; van der Waerden 1954; Poincaré 1952) und gelangt durch Analyse der Beobachtungen zu deskriptiven Klassifikationsschemata (vgl.Haecker/Ziehen 1931; Ruthe 1920; Thomas 1929; Kommerell 1928; Cameron 1925). Sie findet jedoch auch in der marxistischen Lernpsychologie verstärkte Beachtung, in der - ähnlich wie in der Gestaltpsychologie (vgl. Köhler 1917, Duncker 1935, Wertheimer 1945) - der Prozeßcharakter des Problemlösens im Vor-

dergrund steht (vgl.Krutetskii 1969a,b,c).

Zu den beschreibenden Ansätzen, die eine überraschende begriffliche Übereinstimmung mit anderen, etwa faktorenanalytischen Ansätzen aufweisen, zählt der von HAECKER und ZIEHEN (1931):

"A. Räumliche Komponenten

1. räumliche Gestaltauffassung (Synthese, Komplexion) speziell mit Bezug auf gesetzmäßige, insbesondere auch quantitativ fixierbare Lagebeziehungen ...,
2. Gedächtnis für räumliche Gestalten,
3. räumliche Abstraktion (Heraussehen gemeinsamer Merkmale, Relationen, usf.),
4. räumliche Kombination (Auffassen, Behalten und selbständiges Finden verwickelter Zusammenhänge räumlicher Relationen);

B. Logische Komponenten

1. Bildung anschaulicher und vor allem auch unanschaulicher, scharf definierter Begriffe ("Dreieck", "Sinus", "Logarithmus", "Tensor", "Funktionaldeterminante", "Menge", usf.) also begriffliche Abstraktion,
2. Auffassen (Verstehen), Formulieren, Behalten und selbständiges Finden allgemeiner begrifflicher Zusammenhänge, insbesondere quantitativer oder wenigstens quantitativ ausdrückbarer,
3. Auffassen, Behalten und selbständiges Ziehen von Schlüssen und Schlußreihen nach den formalen Regeln der Logik;

C. Spezielle Bildung der Zahlvorstellungen, Zählen, Zahlengedächtnis, Rechnen;

D. Symbolkomponenten (Auffassen, Verstehen, Behalten von Symbolen, Operieren mit Symbolen)" (ebd.S.43f).

Andere Autoren fügen solchen Fähigkeiten speziellere hinzu, wie etwa 'ökonomisches Schlußfolgern', 'mathematische Orientierung' (Thomas 1929), 'funktionales Denken' (Ruthe 192o), Fähigkeit, auf Widersprüche zu achten (Kommerell 1928), oder nennen allgemeinere Fähigkeiten, die für Mathematik unerläßlich seien, wie beispielsweise 'intuitive Kraft', 'Kritikfähigkeit', 'Konzentrationskraft', 'Ausdauer' (Thomas 1929), Kraft, alle Möglichkeiten mit ihren Konsequenzen durchzudenken (Kommerell 1928), 'starke Konzentrationsfähigkeit' (Ruthe 192o).

Allen diesen Ansätzen ist gemein, daß Verlaufseigenschaften von Problemlöseprozessen, die zu diesen Typisierungen führten, nicht genannt werden und die Kriterien, nach denen diese aufgestellt werden, intransparent bleiben (vgl.Werdelin 1958, S.51). Diesen Gesichtspunkten Rechnung zu tragen, vermochten die stärker prozeßorientierten introspektiven Ansätze und erst recht die Gestaltpsychologie.

Die Mathematiker POINCARE (1952), HADAMARD (1945) und van der WAERDEN (1954) versuchten durch Selbstbeobachtung ihrer eigenen mathematischen Tätigkeit die Begleitumstände des Findens mathematischer Theoreme zu verdeutlichen und mathematische Entdeckungen zu erklären.

Nach den Erfahrungen POINCAREs (1952) verläuft der Denkprozeß beim Lösen mathematischer Probleme in vier Stufen:

(1) Vorbereitungsphase: intensive und bewußte Auseinandersetzung mit dem zu lösenden Problem, Ausprobieren verschiedener Gedankenkombinationen, Aufstellen von Hypothesen.

(2) Inkubationsphase: Phase zwischen dem Aufstellen der ersten Hypothesen und dem Auftauchen der Lösungsidee. Zur Erklärung der Abläufe in dieser Phase zieht Poincaré - wie auch Hadamard - unbewußte Prozesse heran.

(3) Illumination (Erleuchtung): Generierung der entscheidenden Idee, des Einfalls.

(4) Verifizierungsphase: Ausarbeitung der Lösungsidee, Deduzieren der Folgen, Zusammensetzen und Ordnen der Lösungselemente, Präzisierung und exakte Formulierung der Idee.

HADAMARD (1945) teilt die Ansichten Poincarés, und auch van der WAERDEN (1954) betrachtet das Lösen mathematischer Probleme als Wechselspiel zwischen "Überlegung und Einfall" (ebd.S.2), hebt jedoch die entscheidende Bedeutung bewußter Überlegungen, beispielsweise die richtige Formulierung des Problems oder das Bilden von Analogien, für die Vorbereitung der Lösungsidee stärker hervor.

Die introspektiven Ansätze machen auf den Prozeßcharakter und die Dynamik produktiver Problemlöseprozesse aufmerksam, wie sie in dem Phasenkonzept Poincarés und in den Modellen von DEWEY (1910), DUNCKER (1935), POLYA (1949), JOHNSON (1955) und MERRIFIELD u.a. (1962) ihren Ausdruck finden. Die Annahme unbewußter Prozesse während der Inkubationsphase beruht jedoch nur auf Vermutungen, für die wissenschaftliche Begründungen fehlen. Sie trägt nicht dazu bei, die Vorgänge, die zur Problemlösung führen, aufzuklären, sondern hemmt das Verständnis für diese Vorgänge und kann dazu verleiten, eine exakte wissenschaftliche Untersuchung dieser Prozesse zu unterlassen.

Hier setzen die Gestaltpsychologen an, die zur Untersuchung von Denkakten übrigens überwiegend mathematische Probleme herangezogen haben. Sie wollen die Rätselhaftigkeit produktiver Einfälle verringern, indem sie sich der Untersuchung der Frage zuwenden, wie Ideen gezielt entwickelt werden können und welche Hindernisse dabei bestehen. Sie versuchen, Regeln anzugeben, deren Anwendung das Durchlaufen der Phasen bis zur Problemlösung erleichtert, und Bedingungen für die Produktion kreativer Lösungen zu analysieren.

Nach der Theorie der Gestaltpsychologen muß bei Denk- und Problemlöseprozessen die 'Gestalt' der Problemsituation erkannt werden. Die wesentlichen Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den Bestandteilen der Problemsituation müssen erfaßt werden, so daß die Situationselemente ein einheitliches Ganzes, eine Struktur, d.h. eine 'Gestalt' bilden. In dieser Gestalt erhalten die einzelnen Elemente eine neue Bedeutung, die sich aufgrund ihrer Relation zu den anderen Elementen ergibt. Produktives Problemlösen erfordert die Fähigkeit, neue Eigenschaften von Situationsmomenten wahrzunehmen, Situationselemente in geeigneter Weise zusammenzufassen und neue Beziehungen zwischen den wesentlichen Teilen einer Situation herzustellen, also die Problemsituation 'umzustrukturieren' oder 'umzuzentrieren' und ihr eine neue Gestalt zu geben, mit dem Ziel, die Funktion der Elemente in dem neuen Beziehungsgefüge so zu verändern, daß durch ihre neue Funktion

die Problemlösung erreicht wird.

Wie WERTHEIMER (1945) beschreibt auch DUNCKER (1935) die produktive Lösung eines Problems als Prozeß, in dem die Lösung schrittweise aus der ursprünglichen Problemstellung entwickelt wird (vgl.ebd.S.9). Zunächst werden die allgemeinen Lösungseigenschaften, der "Funktionalwert" (ebd.S.5) der Lösung herausgefunden. Erst wenn das allgemeine Lösungsprinzip erkannt ist, können die spezielleren und konkreteren, dieses Prinzip verkörpernden Lösungseigenschaften und damit die endgültige Lösung entwickelt werden. Die Endlösung wird sukzessiv über produktive Umformungen des Ausgangsproblems erreicht, durch die die Problemstellung immer mehr verschärft und spezialisiert wird.

> "Wir können somit den Lösungsprozeß ebensowohl als Entwicklung der Lösung wie als Entwicklung des Problems beschreiben. Jede im Prozeß gefundene Lösungseigenschaft, die selber noch nicht reif zur Verwirklichung ist, ... fungiert weiterhin als Umformung, als Verschärfung der ursprünglichen Problemstellung. Es hat somit einen guten Sinn, zu sagen, die eigentliche Leistung beim Lösen von Problemen bestehe darin, daß das Problem produktiver gestellt wird" (ebd.S.10).

Dazu ein Beispiel: Um den Satz "Es gibt unendlich viele Primzahlen" zu beweisen, ist die Umformung dieser Behauptung in den Satz "Für jede Primzahl p gibt es eine Primzahl q mit $p < q$" entscheidend. Daran schließen sich Lösungsphasen an, in denen eine Zahl zu konstruieren versucht wird, die größer als p, jedoch nicht als Produkt darstellbar ist, bis schließlich die Zahl $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1$ gefunden wird. Die endgültige Lösung besteht dann in der Einsicht, daß die Zahl N entweder selbst Primzahl ist oder die gesuchte Zahl als Teiler enthält (vgl.ebd.S.10f, siehe dazu auch das Unterrichtsbeispiel von Wagenschein 1962).

Auch in der sowjetischen Lernpsychologie gibt es Ansätze einer deskriptiven Analyse mathematischer Fähigkeiten. Der quantitative Aspekt mathematischer Fähigkeit wird von diesen Vertretern der deskriptiven Position vernachlässigt, indem auf kontrollierte, laborähnliche Studien, in denen mathematische Fähigkeiten mit Hilfe standardisierter Tests untersucht

werden, verzichtet wird (vgl.Kilpatrick 1973). Daher können ihnen eine Überbetonung der Intuition bei der Entwicklung klassifikatorischer Begriffskategorien, eine unzureichende Ausschöpfung und eine Überinterpretation der vorhandenen Daten sowie intransparente Verfahren vorgehalten werden.

Auf der anderen Seite vermeiden die deskriptiven Ansätze die Bedingungen, die zu einer Charakterisierung der faktorenanalytischen Richtung und Methode als deterministische Statusevaluation Anlaß geben; mit der Betonung des Prozeßcharakters zeigen sie Perspektiven für die Entwicklung didaktischer Forschung auf. Darüber hinaus hat die marxistische Position in der einschlägigen, d.h. westlichen Literatur bislang wenig Resonanz gefunden, anders als etwa faktorenanalytische Untersuchungen zur Struktur mathematischer Fähigkeiten (vgl.Treumann 1974), so daß wir im folgenden auf diese Richtung näher eingehen.

Ausgehend von der Annahme, daß Schüler die Lerngegenstände eines Faches als Teil eines organisierten Systems von Lerngegenständen lernen, werden in der sowjetischen Lernpsychologie Laboruntersuchungen über das Lernen künstlicher und isolierter Lerngegenstände abgelehnt. Diese müssen vielmehr aus dem Schulcurriculum kommen und in dem sie einbettenden System von Lerngegenständen und Lernsituationen untersucht werden. Das Lernen von Mathematik wird da erforscht, wo es normalerweise geschieht: im Klassenraum, und unter den Bedingungen, unter denen es vor sich geht, nämlich in Unterrichtssituationen, allenfalls dadurch modifiziert, daß vorzugsweise mit kleinen Gruppen oder gar mit einzelnen Schülern gearbeitet wird.

Um der Dynamik mathematischer Lernprozesse gerecht zu werden, wird das Verhalten der Schüler im Mathematikunterricht - unter variierenden Unterrichtsbedingungen - beobachtet und analysiert. Nicht so sehr die Produkte mathematischer Leistung stehen bei dieser genetischen Forschungsmethode im Vordergrund, sondern vielmehr die Prozesse des Mathematik-

lernens. Deshalb benutzen sowjetische Lernpsychologen die Methode des Interviews oder eine Reihe von Interviews mit Schülern. Beim Lösen mathematischer Aufgaben wird der Lösungsweg, der Dialog zwischen Lehrer und Schüler, protokolliert und danach analysiert; objektive Leistungstests, die nur Lernergebnisse der Schüler messen, werden skeptisch, wenn nicht gar ablehnend beurteilt, sowohl als Hilfen für Unterrichtsentscheidungen als auch zur Erforschung mathematischer Fähigkeiten. Dies wird damit begründet, daß die Statusevaluation zu einem deterministischen Begriff geistiger Entwicklung führt und von der Suche nach effektiven Unterrichtsverfahren zur Förderung mathematischer Fähigkeiten ablenkt (vgl.Kilpatrick/Wirszup 1969).

KRUTETSKII (1966b) verknüpfte die genetische Methode des Beobachtens der Fähigkeiten von Schülern in Lern- und Lehrsituationen mit testähnlichen Problemaufgaben. Er untersuchte den Prozeß der Bildung und Entwicklung mathematischer Fähigkeiten in verschiedenen Altersstufen, wobei Fähigkeiten definiert werden als "individual-psychological peculiarities of the individual that determine success in the mastering of activity in one field or another" (ebd.S.15). Sie werden bedingt durch

- eine positive Einstellung zur Tätigkeit, auf die sie sich beziehen, d.h. durch Interessen und Neigungen
- Charaktereigenschaften bzw. Persönlichkeitsvariablen wie Ausdauer und Selbstdisziplin
- geistige Prozesse: Wahrnehmungsvermögen, Denken, Gedächtnis, Vorstellungskraft.

Für die Untersuchung der Struktur mathematischer Fähigkeiten und der Entwicklung ihrer Hauptkomponenten unter dem Einfluß von Unterricht analysierte Krutetskii Lösungsprozesse mathematischer Aufgaben. Er beobachtete, wie Schüler Probleme lösen, welche Methoden sie dabei verwenden und welche Schwierigkeiten auftreten. Der quantitative Aspekt des Problemlösens - die Frage, wieviel Aufgaben in welcher Zeit gelöst werden können - trat gegenüber der qualitativen Ana-

lyse des Lösungsprozesses in den Hintergrund.

Um den Prozeß des Problemlösens sichtbar zu machen und um den qualitativen Fortschritt beim Lösen von Aufgaben analysieren zu können, wurden Serien von Problemtypen benutzt, wobei die Aufgaben innerhalb dieser Serien nach folgenden Kriterien ausgewählt wurden (1969a, S.17):

(1) Die Probleme sollten verschiedene Schwierigkeitsgrade umfassen, jedoch nicht zu leichte und zu schwierige, so daß "they could be easily solved by the overwhelming majority of pupils".

(2) Im Zusammenhang damit sollten Probleme mit Elementen mathematischer Kreativität ausgewählt werden, "to analyze the process of forming a new skill".

(3) Die Probleme sollten sich auf neues Material, welches in diesem Zusammenhang erarbeitet wurde, beziehen, "to observe how new skills are mastered".

(4) "Finally, the problems were to be dictated by the nature of our investigation - the process of solving them was to aid in clarifying the question of aptitudes for learning mathematics".

Jeder Problemtyp wurde in Aufgabenfolgen mit zunehmendem Schwierigkeits- und Komplexitätsniveau realisiert und in Unterrichtssituationen dargeboten, damit die Stellen, an denen Schwierigkeiten beim Lösen eines Aufgabentyps eintraten, exakt erkannt und die Effekte gezielter Hilfen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben an eben diesen Stellen untersucht werden konnten.

Dabei benutzte Krutetskii folgende Problemtypserien (vgl.1966b, S.18ff und 1969b, S.63ff):

- Probleme mit einer unformulierten Fragestellung, die die Fähigkeit testen, Fragen, die logisch aus gegebenen Problemstellungen folgen, zu formulieren, und die damit prüfen, ob der Schüler die grundlegenden mathematischen Beziehungen des Problems wahrgenommen hat.

- Probleme mit überflüssigen Angaben, die sinnverstellend wirken. Sie zielen auf die Fähigkeit, die für die Problemlösung wesentlichen mathematischen Beziehungen zu erkennen und die unwesentlichen Fakten zu vernachlässigen.
- Probleme mit unzureichenden Voraussetzungen. Hier geht es um die Fähigkeit, die für die Lösung wesentlichen Elemente herauszufinden und zu erkennen, welche in der Aufgabenstellung fehlen.
- Gruppen von aufeinander bezogenen Problemen, jeweils auf einen bestimmten Problembereich bezogen, innerhalb derer die einzelnen Aufgaben sukzessiv gestellt werden; jede Problemgruppe ist aus fünf Problemen zusammengesetzt: ein initiales Problem, ein Problem, das dem ersten äußerlich ähnelt, jedoch ein Problem anderen Typs verkörpert, sowie drei weitere Probleme, die dem ersten ähneln. Damit soll die Fähigkeit, Probleme aufgrund ihrer wesentlichen Elemente und nicht aufgrund äußerlicher Übereinstimmung zu klassifizieren, angesprochen werden.
- Probleme mit mehreren Lösungen, bei denen verschiedene Problemlösungsmethoden gefunden oder vorgegebene Lösungsmöglichkeiten begründet beurteilt werden sollen.
- Ein System von Problemen, die schrittweise von einer konkreten zu einer abstrakten, allgemeinen Ebene aufsteigen. Die einzelnen Elemente eines Problems müssen nach und nach verallgemeinert werden, bis auf einer Zwischenstufe die konkrete Ebene verlassen wird und die Verallgemeinerung stattfindet.
- Probleme mit wechselndem Inhalt, bei denen sich ein auf den ersten Blick unwichtiges Element eines gegebenen Problems ändert, das jedoch den Inhalt des Problems entscheidend verändert.
- Unbekannte Probleme eines bestimmten Typs, zu denen einige Probleme gleichen Typs erfunden werden sollen.
- Verallgemeinerungsprobleme, die die Fähigkeit, schon gelernte mathematische Sachverhalte auf vorgegebene Beispiele anzuwenden, erfordern.

- Probleme, bei denen algebraische Sätze bewiesen werden sollen.
- Umkehrungsprobleme. Hierbei soll getestet werden, wie nach dem Lösen eines Problems Umkehrprobleme gelöst werden und wie sich der Wechsel zu Umkehrgedankengängen vollzieht.
- Probleme, die mit visuellen Hilfen gelöst werden können. Dabei wird geprüft, wie die visuellen Hilfen eingesetzt werden bzw. was an ihre Stelle tritt, wenn sie nicht benutzt werden.
- Probleme, die mit graphischen Methoden und mit logischen Schlußfolgerungen gelöst werden können. Sie testen die Fähigkeit, nach dem Lösen einer Aufgabe mit Hilfe graphischer Darstellungen diese Aufgabe dann mit Hilfe schlußfolgernden Denkens zu lösen und umgekehrt.
- Probleme, die die Entwicklung räumlicher Begriffe verlangen.
- Unrealistische Probleme, deren Form logisch korrekt ist, deren Daten jedoch nicht.
- Probleme mit einer komplexen und schwer zu merkenden Bedingung.

Anhand dieser Problemtypen schälte KRUTETSKII (1966b, 1969a, 1969b, 1969c) folgende Grundkomponenten der Struktur mathematischer Fähigkeiten heraus:

1. Formalisierte Wahrnehmung mathematischen Materials: Während des Prozesses der Wahrnehmung wird der mathematische Gegenstand formalisiert, d.h. die formale Struktur eines konkreten mathematischen Problems wird erfaßt; der spezielle Inhalt des Problems wird außer acht gelassen, und nur die Beziehungen zwischen den das Problem kennzeichnenden Elementen werden wahrgenommen und bleiben erhalten. Die Fähigkeit, die formale Struktur eines konkreten mathematischen Problems zu entdecken, beinhaltet das Herausfinden der für die Problemlösung notwendigen Tatsachen und das Erkennen der überflüssigen, unnötigen und unwichtigen, aber auch der unzureichenden und fehlenden Daten (als analytische Tätigkeit) und das

Erfassen und Systematisieren der Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen den Aufgabenelementen (als synthetische Tätigkeit). Ein wesentlicher Aspekt dieser Komponente ist die Wahrnehmung und Bewertung eines Problems aus verschiedenen Blickwinkeln. So kann beispielsweise die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ als eine Möglichkeit dafür erkannt werden, den Sinus eines Winkels aus dem gegebenen Kosinus oder umgekehrt den Kosinus aus dem Sinus abzuleiten. Aber auch andere Aspekte können wahrgenommen werden wie z.B. die Eigenschaften, daß Sinus und Kosinus eines Winkels niemals größer als 1 sein können und daß, wenn die Summe zweier Quadratzahlen gleich 1 ist, eine von ihnen der Sinus und die andere der Kosinus desselben Winkels sein muß.

2. Schnelle und umfassende Verallgemeinerung mathematischen Materials: Hierunter fallen die Fähigkeit, das Gemeinsame in unterschiedlichen mathematischen Problemstellungen zu sehen und ein konkretes Problem als Repräsentant einer Klasse von Problemen gleichen Typs zu erkennen, die Fähigkeit, ein gegebenes Problem als Spezialfall eines allgemeineren Problems aufzufassen und in allgemeiner Form zu lösen, und die Fähigkeit, eine Aufgabenstellung als Verallgemeinerung eines schon gelösten Problems wahrzunehmen, Elemente der bekannten Problemlösungsmethode zu verallgemeinern und auf die neu zu lösende Aufgabe zu übertragen.

3. Verkürzung des Gedankengangs (Reduktionsfähigkeit): Damit ist die Fähigkeit gemeint, Zwischenschritte im Prozeß des Schlußfolgerns zu überspringen, wodurch der Prozeß zusammengefaßt und reduziert wird. Drei Ausprägungsgrade dieser Fähigkeit sind erkennbar:

(1) Die ausgelassenen Zwischenschritte werden wahrgenommen.

(2) Die weggelassenen Zwischenglieder werden nicht mehr wahrgenommen, die Schlußfolgerungskette kann aber bei Bedarf leicht ausgeweitet werden.

(3) Die Schlußfolgerungskette wird nicht verkürzt, da schon in verkürzten Strukturen gedacht wird; die Vervollstän-

digung der Schlußfolgerungen bereitet deshalb Schwierigkeiten.

Krutetskii führt ein Beispiel für eine extrem starke Ausprägung dieser dritten Stufe an (vgl.1966b, S.25): Ein mathematisch leistungsfähiger Schüler gab auf die Frage, wie groß die Strecke $\overline{O\,O_1}$ in dem abgebildeten geometrischen Problem (siehe Abb. 3) sei,

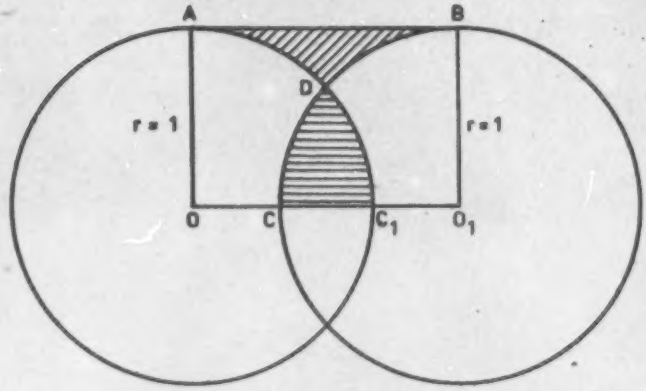


Abbildung 3
(nach Krutetskii 1966b, S.25)

Wie lang ist die Strecke $\overline{O\,O_1}$?

wenn die gestrichelten Flächen gleich groß sind und der Radius der Kreise jeweils r = 1 ist, ohne zu zögern die Antwort $\frac{\pi}{2}$. Aufgefordert, dieses Ergebnis zu erläutern, konnte er nur erklären, daß im Viertelkreis CO_1B die gestrichelte Fläche durch die gleichgroße Fläche ABD ersetzt werden müsse. Eine Begründung könnte indessen etwa so lauten:

- die Strecke $\overline{O\,O_1}$ ist eine Seite des Rechtecks AOO_1B und kann über den Umweg der Flächenberechnung dieses Rechtsecks

erhalten werden, da die Seite r des Rechtsecks die Länge 1 hat;

- die Fläche des Rechtecks AOO_1B ist gleich der Summe aus den Flächen beider Viertelkreise und der Fläche ABD abzüglich der flächengleichen Überschneidungsfläche CDC_1 der beiden Viertelkreise, also der Fläche des halben Einheitskreises: $\frac{\pi}{2}$.

4. Gedankenflexibilität: Eine wichtige Fähigkeit innerhalb dieser Komponente ist das leichte und schnelle Umschalten von einer Denkoperation zu einer anderen, im Extremfall von einem Gedanken zu seiner Umkehrung (Reversibilität). Hierzu ein Beispiel (vgl.ebd.S.26): Beim Lernen der binomischen Formel $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$ wird nicht nur erkannt, daß das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen a und b als Differenz ihrer Quadrate darstellbar ist, sondern gleichzeitig auch, daß sich die Differenz zweier Quadratzahlen in Faktoren aufspalten läßt. Zur Flexibilität gehören

- die Erkenntnis, daß ein Problem, auch in der Mathematik, auf unterschiedlichen Wegen gelöst werden und verschiedene Lösungen haben kann,
- die Fähigkeit, mehrere Lösungsmöglichkeiten eines Problems wahrzunehmen und nicht nur stereotype Lösungsmethoden anzuwenden und
- die Bereitschaft, Methoden, die nicht oder nur auf Umwegen zum Ziel führen, aufzugeben.

Oft müssen bekannte Denkmethoden "aufgebrochen" werden, damit ein Problem gelöst werden kann. Bei Krutetskiis Versuchspersonen zeigten sich nicht nur Schwierigkeiten beim Übergang von einer leichteren zu einer komplizierteren, sondern gerade beim Umschalten von einer komplizierten, aber vertrauten, zu einer einfachen, aber neuen und ungewohnten Lösungsmethode.

5. Streben nach Denkökonomie, nach Klarheit, Einfachheit und Verfeinerung mathematischer Lösungsmethoden: Diese Komponente der mathematischen Fähigkeitsstruktur ist gekennzeichnet durch die Fähigkeit, verschiedene Lösungsmethoden zu beschreiben, zu vergleichen, gegeneinander abzuwägen und zu bewerten, um anschließend eine einfache und ökonomische Möglichkeit auszuwählen, und durch das kreative Suchen nach Verbesserungsmöglichkeiten für die gefundene Lösungsmethode.

6. Mathematisches Gedächtnis: Darunter ist nicht ein Zahlengedächtnis oder ein gutes Gedächtnis isolierter Tatsachen zu verstehen, sondern ein schnelles Sich-erinnern-können an mathematische Problem- und Problemlösungstypen und Schlußfolgerungs- und Beweisschemata. Es hat selektiven Charakter: nicht die gesamte Informationsmenge wird gespeichert, sondern nur die Informationen, die vom konkreten Inhalt losgelöst sind. Mathematische Beziehungen bleiben im Gedächtnis, Konkretes, Spezielles und für späteres Problemlösen Unwichtiges dagegen nicht.

Neben diesen festen Komponenten der Struktur mathematischer Fähigkeiten gibt es, so KRUTETSKII (1966b), Komponenten, die zusätzlich vorhanden sein können und die somit den Typ mathematischer Fähigkeit bestimmen. Dazu gehört die Entwicklung räumlicher Begriffe, das räumliche, geometrische Vorstellungsvermögen, d.h. die Fähigkeit, sich die räumliche Lage eines geometrischen Körpers und die Anordnung seiner Teile zueinander vorzustellen. Durch das Fehlen bzw. die mehr oder weniger starke Ausprägung dieser Komponente werden zwei grundlegende Typen mathematischer Fähigkeiten, algebraische und geometrische Fähigkeiten, charakterisiert. Die Zusammensetzung und Ausprägung der einzelnen Komponenten kann in verschiedenen Individuen unterschiedlich sein, wodurch verschiedene Typen mathematischer Fähigkeit entstehen.

Welchen Stellenwert nimmt Krutetskiis Ansatz mit seiner charakteristischen Verknüpfung von Untersuchungsgegenstand (Lernvoraussetzungen) und Methode (Prozeßbeobachtung) inner-

halb der sowjetischen Lernpsychologie ein? Aufgrund der spezifischen Eigenentwicklung der sowjetischen Lernpsychologie (vgl.Menschinskaya 1969) können wir einen nur skizzenartigen Überblick geben, um anschließend auf den allgemeinen denkpsychologischen Ansatz Rubinsteins näher einzugehen, was wir im folgenden begründen.

Krutetskii steht mit seiner Forschung in der Tradition der sowjetischen Lernpsychologie, die sich methodisch durch einen Forschungsansatz auszeichnet, nicht mehr "cross-sectional" die Daten von Schülern verschiedener Alters- und Entwicklungsstufen zu vergleichen, sondern 'genetisch' die Entwicklung des Lernerfolges einer bestimmten Gruppe von Schulkindern zu verfolgen. Diese Methode schlägt sich in einer neuen Form des Experiments, dem 'Lehrexperiment' nieder, in dem die Untersuchung mit pädagogischem Einfluß verbunden wird; übrigens findet dieser Ansatz im Westen mit "action research", das heißt feldbeeinflussender Forschung (vgl.Fischler 1975), seine Entsprechung.

In dem Maße, in dem sich die sowjetische Lernpsychologie, ihre Untersuchungen nach Untersuchungsgegenständen differenzierend, ausweitete, gewann nicht nur die fachspezifische Lernpsychologie, sondern auch die allgemeine Denkpsychologie an Raum. Wurde bislang Entwicklung als Folge einander ablösender, von Lernmethoden und Lerninhalten unabhängiger Reifestadien aufgefaßt, tendiert man nun dazu, Lernprozesse unter dem Einfluß von variierenden Inhalten und Methoden zu untersuchen. Ein solches Vorgehen bewirkte eine Auffassung von Unterricht als ein zielgerichtetes, bewußtes Vorgehen; damit waren die sowjetischen Lernpsychologen in der Lage, dem in den USA vorherrschenden Behaviorismus und einer seiner Varianten, dem Konnektionismus Thorndikescher Prägung (Verhalten und Lernen als Verbindung von Reiz und Reaktion, Übung als mechanisches Training) eine Alternative aufzuzeigen.

Diese spezifische Entwicklung fand ihren Niederschlag in einer allgemeinen Denktheorie, an die die speziellen Lerntheo-

rien angebunden werden können; übrigens ist diese Denktheorie umfassend genug, solch gegensätzliche Richtungen zuzulassen wie die Krutetskiis, der den individuellen Lernvoraussetzungen im Mathematikunterricht eine zentrale Stellung einräumt, und Galperins, der individuelle Lernvoraussetzungen nur insoweit akzeptiert, als sie Ausdruck zurückliegender, unzureichender Lernerfahrungen sind (vgl.Krutetskii 1969).

Krutetskiis Theorie ist, wie die der meisten sowjetischen Lernpsychologen und solchen aus der DDR, an der grundlegenden Denkpsychologie RUBINSTEINs (1958, dtsch.1972) orientiert. Denken ist für Rubinstein ein Prozeß, eine Tätigkeit; Denken findet in ununterbrochener Wechselwirkung zwischen Mensch und Objekt statt (1972, S.17ff). Diese Wechselwirkung wird durch geistige Handlungen, durch den dialektischen Prozeß von Analyse und Synthese hervorgerufen (vgl.ebd.S.30ff), was auch von Krutetskii als umfassendes Merkmal mathematischer Problemlösungsprozesse angesehen wird (vgl.1969c, S.106f). Solche hypothetischen Konstrukte können nach RUBINSTEIN (1972) teilweise empirische verifiziert werden, indem etwa die "gerichtete Analyse", beispielsweise der Bedingungen einer Aufgabe, durch den synthetischen Akt des In-Beziehung-Setzens der Bedingungen mit den Forderungen erschlossen wird (vgl.ebd.S.33). Da die Analyse als Erkenntnistätigkeit die wesentlichen Bedingungen von Problemen herausstreicht, kann sie auch in Abstraktion übergehen, die auch als "spezifische Form der Analyse, die sie beim Übergang zum abstrakten Denken in Begriffen annimmt", bezeichnet wird (ebd.S.34f). Synthese bezeichnet den Bereich der Erkenntnistätigkeit, der für das Herstellen von Beziehungen, Gegenüberstellungen und Verbindungen zwischen verschiedenen Elementen zutrifft (vgl.ebd.S.36).

Abstraktion und Generalisation als Fähigkeit, das Wesentliche auszusondern, bezeichnet Rubinstein als das "Hauptmerkmal des Verstandes überhaupt" (ebd.S.41). Auch sie stehen in einem dialektischen Zusammenhang, in dem Generalisation eine Verallgemeinerung dessen, was in einem analytischen Abstraktionsprozeß aus dem Beiläufigen, Unwesentlichen, Verfälschenden als

Wesentliches extrahiert wurde, ist (vgl.ebd.S.41). Indem im Denkverlauf diese Operationen sich herausbilden und das Individuum diese generalisiert und fixiert, "prägt sich das Denken als Fähigkeit aus, konstituiert sich der Intellekt" (ebd.S.48).

Interessanterweise werden Erkenntnisse über allgemeine geistige Fähigkeiten aus der Beobachtung von Problemlöseverhalten von Schülern bei mathematischen Problemen gewonnen. Dabei steht nicht das Produkt des Problemlöseprozesses, das die behavioristisch orientierten Empiriker des Westens mit ihrem diagnostischen Instrument der Statusevaluation auf seine Voraussetzungen hin untersuchen, sondern die Verlaufseigenschaften im Vordergrund:

> "Selbstverständlich kann man den Denkprozeß aufgliedern. So führt die Analyse einer Aufgabe zum Gegebenen und Gesuchten, die Analyse des Gegebenen in bezug auf die Forderungen der Aufgabe führt zu den Bedingungen, die das Bekannte und Gesuchte darstellen usw. Unter dem Aspekt des erreichten Resultates bietet sich jedes Glied des Denkprozesses als einheitlicher Akt dar (als geistige Operation)" (ebd.S.47).

Von den Besonderheiten der jeweiligen Gegenstandsbereiche abzusehen und die logische Struktur solcher Operationen freizulegen, läßt sich offensichtlich am deutlichsten anhand von mathematischen Problemen vollziehen. Aufgrund dieser idealtypischen Eigenschaften von Mathematik steht auch in der Denkpsychologie Rubinsteins der wiederholt von den Gestaltpsychologen vorgetragene Aspekt im Vordergrund, "früher einmal gefundene Lösungen (Kenntnisse) auf neue Aufgaben" zu übertragen (ebd.S.65). Das erscheint deswegen wichtig, weil in einer solchen Übertragung das Lösungsmoment mancher Aufgaben gesehen wird und umgekehrt das Fehlen einer solchen Fertigkeit als häufig zu beobachtender Fehler anerkannt wird (vgl.ebd. S.65; Beispiel ebd.S.67ff). Wir können also feststellen, daß es in der sowjetischen Lernpsychologie offensichtlich einen engen Bezug gibt zwischen mathematischen Fähigkeiten, wie sie Krutetskii analysiert und als Qualifikationen postuliert, und allgemeinen intellektuellen Denkfähigkeiten.

Denken ist jedoch bei Rubinstein nicht ausschließlich Transferleistung; es konstituiert sich außerdem in der Interaktion mit Sprache, wie es sich etwa bei Problemlösungen erweist, die von der Repräsentation der Problemstellungen (verbal, schriftlich, symbolisch) abhängen.

Darüber hinaus sieht er eine Wechselbeziehung von Wahrnehmung von Qualitäten eines Objekts und Denkprozeß. Von dieser Wechselbeziehung nimmt er an, daß sie den Sachverhalt erklärt, daß erst im Verlauf des Denkprozesses gewisse Eigenschaften eines Objekts wahrgenommen werden und nicht schon zu Beginn, was er an einem mathematischen Beispiel verdeutlicht (siehe Abb. 4).

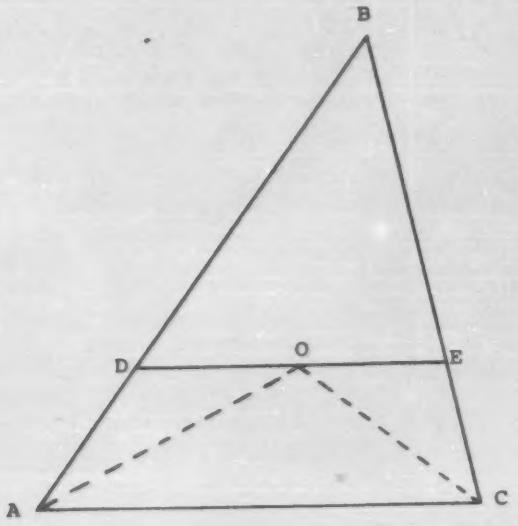


Abbildung 4

(Rubinstein, 1958; dtsch.1972, S.96)

Problem zur Erfassung der Wechselbeziehung von Wahrnehmung der Problemeigenschaften und Denkprozeß.

Zu einer in einem Dreieck durch den Schnittpunkt zweier Win-

kelhalbierenden gezogenen Geraden, die parallel zu der Verbindung der Endpunkte der Winkel liegt, soll bewiesen werden, daß die Länge dieser Parallelen innerhalb des Dreiecks gleich der Summe der Abschnitte ist, die durch die Schnittpunkte der Parallelen mit den übrigen Dreiecksseiten und den zu den Winkeln gehörenden Eckpunkten gebildet werden (vgl.ebd.S.96).

Beweis:

(1) $\sphericalangle OAC = \sphericalangle DOA$ (Wechselwinkel an den Parallenen $\overline{DO}$ und $\overline{AC}$ und der Schnittgeraden $\overline{AO}$)

(2) $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OAC$ (Voraussetzung)

(3) $\sphericalangle OAD = \sphericalangle DOA$ (1) und (2)

(4) $\overline{AD} = \overline{DO}$ (3)

(5) $\overline{OE} = \overline{EC}$ (analog)

(6) $\overline{AD} + \overline{EC} = \overline{DO} + \overline{OE} = \overline{DE}$.

Dabei gehen Rubinsteins Versuchspersonen so vor, daß sie zunächst die Winkelhalbierenden betrachten, diese dann in Beziehung zu den Parallelen $\overline{AC}$ und $\overline{DE}$ setzen und sie so als Schnittgerade betrachten und dabei die neue Eigenschaft, Wechselwinkel, entdecken. Sodann werden die Winkelhalbierenden in die Dreiecke mit einbezogen und erhalten eine neue Eigenschaft, Seiten der Teildreiecke AOD und OEC zu sein.

> "Die Gerade $\overline{AO}$ wird also von der Vpn jedesmal in ein neues System von Beziehungen eingeordnet, und jedesmal findet sich an ihr die neue Eigenschaft der Winkelhalbierenden, der Schnittgeraden und der Dreiecksbasis. Alle diese Eigenschaften der Geraden $\overline{AO}$, die auf diese Weise ermittelt worden sind, werden zueinander in Beziehung gesetzt, und erst diese Korrelation liefert die Aufgabenlösung" (ebd.S.97).

Offensichtlich scheinen in dieser Frage, der Wechselwirkung von Problemdetails, ihrer Gesamtheit und dem Lösungsprozeß, die Auffassungen von Rubinstein und gestaltpsychologisch orientierten Intelligenztheoretikern wie Meili zu konvergieren. Darüber hinaus ist auch eine Übereinstimmung, vernachlässigen wir einmal die unterschiedlichen erkenntnis-

theoretischen und erkenntnisleitenden Standpunkte, mit frühen Gestaltpsychologen, etwa DUNCKER (1935), in der Frage des zentralen Stellenwerts des Umformens, Umzentrierens oder Umformulierens sowohl allgemein bei Problemlöseprozessen (Rubinstein) als auch bei produktiven Problemlöseprozessen (Duncker) festzustellen.

Rubinstein charakterisiert diese Umformulierungen so:

> "Die Umformulierungen, von denen bisher die Rede war, rührten daher, daß die Analyse bei Einbeziehung der Objekte in neue Zusammenhänge an denselben Objekten neue Eigenschaften aufdeckte, die sich in neuen begrifflichen Charakteristiken äußerten. Eine Umformulierung der Aufgabe erfolgt aber auch dann, wenn die Analyse eine gesetzmäßige Abhängigkeit und daher auch gegenseitige Einsetzbarkeit zweier Sätze aufdeckt. Dann wird der eine Satz durch einen anderen ersetzt, der größere Möglichkeiten für die weitere Analyse und Lösung der Aufgabe bietet" (ebd. S.1o4).

Obwohl auf verschiedenen erkenntnistheoretischen Ansätzen und unterschiedlichen erkenntnisleitenden Interessen basierend, kann also auf eine partielle Übereinstimmung zwischen Gestaltpsychologie und der Denktheorie Rubinsteins geschlossen werden. Da sich Krutetskii an Rubinsteins Konzept von Analyse und Synthese als grundlegenden geistigen Tätigkeiten anlehnt, zeigen sich auch in seinem Ansatz Übereinstimmungen mit der Gestaltpsychologie, wie auch KILPATRICK und WIRSZUP (1969) feststellen:

> "Krutetskiis work on the nature of mathematical ability stands as a major contribution to the literature on thinking. Seen in perspective, his techniques and framework of analysis add yet another dimension to the line of investigation, begun by Selz, Westheimer and Duncker, and being continued today by the information - processing theorists" (ebd.S.3).

4. PERSPEKTIVEN FÜR WEITERE DIDAKTISCHE FORSCHUNG

Überlegungen zum Stellenwert der hier referierten theoretischen Ansätze zur Struktur mathematischer Fähigkeiten innerhalb der didaktischen Forschung sollten möglichst an deren Defiziten und praktischen Konsequenzen ansetzen.

Die verschiedenen Intelligenzstrukturmodelle liefern eine Fülle aufeinander abgestimmter Faktoren, die als mathematische Fähigkeiten interpretiert werden, so daß sich eine Kohärenz zwischen mathematischen und allgemein-intellektuellen Fähigkeiten zeigt. Daß diese sogar hochgradig kohärent sind, nahezu alle Intelligenzfaktoren als mathematische Fähigkeiten aufzufassen sind, liegt jedoch in dem Verfahren begründet, allgemeine intellektuelle Fähigkeiten mit vorwiegend mathematischem Material zu erfassen. Es muß also mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß mit Intelligenztests dieser Art nur ein abgegrenzter, spezifischer Bereich intellektueller Fähigkeiten erfaßt wird, nämlich die Fähigkeit zum Umgang mit eben dem Material, das dem Test zugrunde liegt.

Zum anderen werden innerhalb der intelligenztheoretischen Ansätze die extrahierten Faktoren nahezu ausschließlich material interpretiert. Über die Wirkungsweise dieser Fähigkeiten bei der Auseinandersetzung mit Problemen können damit noch keine Aussagen getroffen werden. Eine Ausnahme bildet wohl der gestalttheoretisch orientierte Ansatz von Meili.

Die deskriptiven Ansätze kommen diesem Einwand entgegen, indem mögliche Wirkungsweisen mathematischer Fähigkeiten angedeutet werden, etwa bei Krutetskii. Über das Zusammenwirken solcher Fähigkeiten untereinander und mit anderen kognitiven oder sozial-affektiven Fähigkeiten im Problemlöseprozeß sagen faktorenanalytische und deskriptive Ansätze nur sehr wenig aus. Bei den deskriptiven Ansätzen kommen die Schwierigkeiten ihrer empirischen Überprüfbarkeit hinzu.

Beide Richtungen zur Untersuchung mathematischer Fähigkeiten stehen relativ unvermittelt nebeneinander, obwohl beide Richtungen den gleichen Gegenstand untersuchen. Und obwohl es einige Versuche gibt, bei faktorenanalytischen Untersuchungen von denkpsychologischen Hypothesen auszugehen und denkpsychologische Erkenntnisse zur Interpretation faktorenanalytischer Ergebnisse zu benutzen, etwa bei MEILI (1964) oder MERRIFIELD u.a. (1962), zeigt sich eine Verknüpfung der unterschiedlichen Ansätze als deutliches Desiderat.

Es bleibt abschließend die Frage nach der Relevanz faktorenanalytischer und deskriptiver Ansätze für den Mathematikunterricht zu stellen. Beide Richtungen stimmen darin überein, mit Hilfe der Erfassung der Struktur mathematischer Fähigkeiten die individuellen Lernvoraussetzungen differenzierter zu beurteilen und zu berücksichtigen, als es mit traditioneller Leistungsmessung möglich ist (vgl.Treumann 1974, S.144; Krutetskii 1969a, S.5). Offen bleibt allerdings die Frage der Realisierungsmöglichkeit der Folgerungen aus einer Theorie zur Struktur mathematischer Fähigkeiten. Für den faktorenanalytischen Ansatz hat TREUMANN (1974) die Schwierigkeiten und Probleme der Anwendbarkeit in der Schule aufgezeigt.

Obwohl Krutetskiis Ergebnisse als vorläufig betrachtet werden müssen, geben sie doch Hinweise für Anwendungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht. In der DDR haben sich Ansätze herausgeschält, Rubinsteins generelle Betrachtungsweise von geistigen Operationen als Prozesse von Analyse und Synthese sowie Krutetskiis spezifische Betrachtungsweise mathematischer Fähigkeiten aufzunehmen. So klassifiziert GULLASCH (1973) mathematische Fähigkeiten nach den Gesichtspunkten

- Abstraktion
- Verallgemeinerung
- Reversibilität
- Reduktion

und versucht gleichzeitig eine Quantifizierung, indem er "Ausprägungsgrade" mathematischer Fähigkeiten untersucht.

> "Es genügt nicht, zu erfahren, wozu der konkrete Mensch befähigt ist. Gleichzeitig muß auch die jeweilige Niveaustufe, die Höhe seiner Fähigkeiten bestimmt werden" (ebd.S.25).

Anhand der Untersuchung von Merkmalsklassen mathematischer Fähigkeit und ihrer Ausprägungen erhofft Gullasch dadurch Fähigkeitsprofile zu bestimmen, indem er beim Lösen merkmalspezifischer Aussagen ein System von gestuften Hinweisen, die an möglichen Defiziten orientiert sind, zur Verfügung stellt und aus der Wahl der Hilfen auf den Ausprägungsgrad des Merkmals zurückschließt. Diesen Ansatz könnte man kenn-

zeichnen als Defizitdiagnose durch Wahlentscheidung. Daraus ergeben sich Möglichkeiten für therapeutische Maßnahmen, die zur Beseitigung des durch die Wahl der Hilfe diagnostizierten Defizits beitragen.

Gullaschs Ansatz zeigt ausgeprägten Modellcharakter, der zwar wegen seiner Überschaubarkeit die Praktikabilität im Unterricht erhöht, jedoch aufgrund seiner Beschränkung auf vier Merkmalsklassen und drei Niveaustufen, bei denen überdies gefragt werden muß, ob diese auf einem Kontinuum liegen, der Krutetskiischen Aspektfülle nicht entspricht.

Darüber hinaus müssen wir bei diesem wie auch bei anderen, auch faktorenanalytischen Ansätzen - ihre Praktikabilität bei uneingeschränkter Aspektfülle einmal vorausgesetzt - fragen, welche Auswirkungen sie auf den Mathematikunterricht haben. Greifen wir unseren eingangs aufgeführten Aspekt von Unterricht als Interaktion von individuellen Lernvoraussetzungen und Curriculum auf, können wir feststellen, daß wir über die individuellen Lernvoraussetzungen hinreichend genaue Aussagen treffen können. Darauf abgestimmte Differenzierungsmaßnahmen im Unterricht ergeben sich aus der Kenntnis der individuellen Lernvoraussetzungen nicht "automatisch", sondern sind abhängig von der zugrundeliegenden allgemeinen Zielsetzung des Unterrichts.

Aufgabe didaktischer Forschung wäre es, dem Lehrer Handlungsmodelle zur Verfügung zu stellen, damit er je nach Lernvoraussetzungen und Zielvorstellungen eine Differenzierung durch Individualisierung leisten kann. Eine solche Differenzierung bedeutet, innerhalb von Problemstellungen zu differenzieren, Lernen durch Variationen der Problemstellungen, Variationen der Repräsentationsmodi und Reflektion der Formen der Lehrer-Schüler-Interaktion und Schüler-Schüler-Interaktion zu ermöglichen. Für den augenblicklichen Stand der didaktischen Forschung bleibt diese Forderung programmatisch, solange SHULMANs (1974) klassische Äußerung hinsichtlich der in letzter Zeit sich ausbreitenden ATI-Forschung (aptitude-treatment-interaction), d.h. des Ansatzes, Fähigkeiten zu diagnostizieren und

durch darauf abgestimmte Unterrichtsmaßnahmen gezielt zu fördern, gilt:

> "Wechselwirkung zwischen Begabung und Behandlung (bzw. zwischen Entwicklung und Erziehung) wird solange eine leere Phrase bleiben, wie Fähigkeiten mit dem Mikrometer gemessen, Umweltgegebenheiten aber nur mit der Wünschelrute ertastet werden" (ebd.S.801).

LITERATUR

Barakat M.K. : A Factorial Study of Mathematical Abilities. In: Brit.Journal of Psychology, Statistical Section, 4, 1951, 137-156

Bergius R. : Analyse der "Begabung": Die Bedingungen des intelligenten Verhaltens. In: Roth H. (Hrsg.): Begabung und Lernen. Stuttgart 1968, (7) 1971, 229-268

Biermann N.
Niedworok H.-W. : Die Struktur mathematischer Fähigkeiten ("Begabung") unter besonderer Berücksichtigung des produktiven Denkens und seiner Förderung im mathematischen Unterricht. Examensarbeit Universität Bielefeld 1975

Blackwell A.M. : A Comparative Investigation into the Factors Involved in Mathematical Ability of Boys and Girls. In: British Journal of Educational Psychology 1o, 194o, 143-153; 212-222

Bottenberg E.H.
Maiwald D.K. : Lernbedingungen mathematischer Leistung. München 1972

Burt C. : The Structure of the Mind: A Review of the Results of Factor Analysis. In: British Journal of Educational Psychology 19, 1949, 1oo-111; 176-199

Cameron A.E. : A Comparative Study of the Mathematical Ability of Boys and Girls in Secondary Schools. In: British Journal of Psychology 16, 1925-26, 29-49

Cattell R.B. : Theory of Fluid and Crystallized Intelligence. In: Journal of Educational Psychology 54, 1963, 1-22. Dtsch.: Theorie der fluiden und kristallisierten Intelligenz: Ein kritisches Experiment. In: Skowronek H. (Hrsg.): Umwelt und Begabung. Stuttgart 1973, 27-62

Dewey J. : How We Think. New York 191o

Duncker K. : Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin 1935, Neudruck 1963, engl.: 1945

Fischler H. : Die Differenzierungsdiskussion - Opfer wissenschaftlichen Schlendrians? In: Die Deutsche Schule 67, 1975, 3, 166-179

Frick J.W.
Guilford J.P.
Christensen P.R.
Merrifield P.R. : A Factor-analytic Study of Flexibility in Thinking. In: Educational and Psychological Measurement 19, 1959, 4, 469-496

Guilford J.P. : Creativity. In: The American Psychologist, 195o, 5, 444-454

Guilford J.P. : Intellectual Factors in Productive Thinking. In: Aschner M.J.; Bish C.E. (Hrsg.): Productive Thinking in Education. New York 1965, 5-2o

Guilford J.P. : The Nature of Human Intelligence. New York 1967

Guilford J.P. Hoepfner R. : The Analysis of Intelligence. New York 1971

Gullasch R. : Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten. In: Psychologische Beiträge 14, Berlin 1972

Guthke J. : Zur Diagnostik der intellektuellen Lernfähigkeit. Berlin 1972

Hadamard J. : The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York 1945

Haecker V. Ziehen T. : Beitrag zu der Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung. In: Zeitschrift für Psychologie 121, 193o-31, 1-1o3

Haenschke-Kramer B. Mehl J. : Zur Untersuchung von Spezialbefähigungen auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet. In: Zeitschrift für Psychologie 174, 1967, 285-31o

Hedinger U.K. : Die Faktorenstruktur komplexer Denkaufgaben. In: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie 12, 1965, 337-4o3

Jäger A.O. : Dimensionen der Intelligenz. Göttingen 1967, (2) 197o

Johnson D.M. : The Psychology of Thought and Judgment. New York 1955

Kilpatrick J. Wirszup I. : Introduction. In: Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds): Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities. Stanford, Calif. 1969, 1-3

Kilpatrick J. : Research in the Teaching and Learning of Mathematics; Paper Presented at the 56. Annual Meeting of the Mathematical Association of America. Dallas, 28.1.1973

Köhler W. : Intelligenzprüfungen an Anthropoiden. Abhandlungen d. Preuß. Akademie d. Wissenschaften, 1917; Neuauflage: Intelligenzprüfungen an Menschenaffen. Berlin 1963

Kommerell V. : Über mathematische Begabung. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie 29, 1928

Krutetskii V.A. : Zur Struktur der mathematischen Fähigkeiten. In: Psychologische Beiträge 6, Berlin 1966a

Krutetskii V.A. : Age Pecularities in the Development of Mathematical Abilities in Students. In: Soviet Education 8, 1966b, 15-27

Krutetskii V.A. : An Investigation of Mathematical Abilities in School-Children. In: Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds): Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities. Stanford, Calif. 1969a, 5-57

Krutetskii V.A. : An Analysis of the Individual Structure of Mathematical Abilities in School-Children. In: Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds): Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities. Stanford, Calif. 1969b, 59-1o4

Krutetskii V.A. : An Experimental Analysis of Pupils' Mathematical Abilities. In: Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds): Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II: The Structure of Mathematical Abilities. Stanford, Calif. 1969c, 1o5-111

Meili R. : Grundlegende Eigenschaften der Intelligenz. In: Schweizerische Zeitschrift für Psychologie 2, 1943/44, 166-175 und 265-271

Meili R. : Die faktorenanalytische Interpretation der Intelligenz. In: Schweizerische Zeitschrift für Psychologie 23, 1964, 135-155

Menschinskaya N.A. : Fifty Years of Soviet Instructional Psychology. In: Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds): Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. I, 1969, 5-27

Merrifield P.R.
Guilford J.P.
Christensen P.R.
Frick J.W. : The Role of Intellectual Factors in Problem Solving. In: Psychological Monographs: General and Applied, Vol. 76, No. 1o, Whole No. 529, 1962, 1-21

Möbius P.J. : Über die Anlage zur Mathematik, (2) 19o7

Oldham H.W. : A Psychological Study of Mathematical Ability, with Special Reference to School Mathematics. In: Part I: British Journal of Educational Psychology 7, 1937, 269-286; Part II: British Journal of Educational Psychology 8, 1938, 16-28

Petersen H.
Guilford J.P.
Hoepfner R.
Merrifield P.R. : Determination of 'Structure-of-Intellect' Abilities Involved in Ninth-Grade Algebra and General Mathematics. Reports from the Psychological Laboratory, No. 31. Los Angeles 1963, 1-4o

Poincarè H. : Science and Method. New York 1952

Polya G. : Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern 1949

Roeder P.M. : Modelle der Differenzierung in Abhängigkeit von Leistungsdimensionen einzelner Fächer. In: Roeder P.M./ Treumann K. (Hrsg.): Dimensionen der Schulleistung; Gutachten und Studien der Bildungskommission, Band 21/1. Stuttgart 1974

Roth H. (Hrsg.) : Begabung und Lernen. Stuttgart 1968, (7) 1971

Rubinstein S.L. : Das Denken und die Wege seiner Erforschung. Berlin 1968, (4) 1972, russ. 1958

Ruthe P. : Über mathematische Begabung, ihre Analyse und ihre Prüfung bei 13-jährigen begabten Volksschülern. In: Probleme der Psychologie 1, 192o

Schaedeli R. : Untersuchungen zur Verifikation von Meilis Intelligenzfaktoren. In: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie 8, 1961, 211-264

Shulman L.S. : Pädagogische Forschung - Versuch einer Neufassung, Teil I. In: Die Deutsche Schule 66, 1974, 12, 798-8o9

Spearman C. : The Abilities of Man. London 1927

Thurstone L.L. : Primary Mental Abilities. Chicago 1938

Thurstone L.L.
Thurstone T.G. : Mechanical Aptitude III. Analysis of Group Tests. Chicago 1949

Thomas H. : Die mathematische Begabung und ihre Prüfung. In: Ind.Ps., 6, 1929

Treumann K. : Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht. In: Roeder P.M. u. Treumann K. (Hrsg.): Dimensionen der Schulleistung; Gutachten und Studien der Bildungskommission, Band 21/2. Stuttgart 1974

Vernon P.E. : The Structure of Human Abilities. London 1961

Very P.S. : Differential Factor Structures in Mathematical Ability. In: Genetic Psychology Monographs 75, 1967, 169-2o7

van der Waerden : Einfall und Überlegung. Basel 1954

Wagenschein M. : Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlreihe. In: Der Mathematikunterricht 8, 1962, 4, 29-38

Weber H. : Untersuchungen über die Faktorenstruktur numerischer Aufgaben. In: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie 1, 1953, 336-393

Werdelin I. : The Mathematical Ability. Lund 1958

Wertheimer : Produktives Denken. Frankfurt (2) 1964; engl. Productive Thinking, 1945

Wrigley J. : Faktorial Nature of Ability in Elementary Mathematics. In: British Journal of Educ.Psychology 28, 1958, 61-78

END